الإحصاء والاحتمالات – المحاضرة السادسة

Statistics and probabilities-Lecture 6

Dr Soummaya Abdul-Hak, Dr. Ali Ahmed
Doctor lecturer in statistics and programing

2025

العزوم Moments:

تعرَّف العزوم بدلالة التوقع الرياضي لمتغير عشوائي، وهي بالواقع تطبيقات مباشرة للتوقع الرياضي. فإذا رمزنا بالرمز: $E[X] = m_X$ وكانت c نقطة من المحور الحقيقي، عندئذٍ نسمّي الكمية:

$$E\left[(X-c)^i\right];\ \ i = 0,1,2,3,\dots$$

بالعزم من المرتبة i للمتغير X بالنسبة للنقطة c . فمن أجل:

- $c = 0$ نحصل على العزوم الابتدائية من المرتبة i للمتحول العشوائي X و نرمز له بالرمز α_i

حيث:

$$\alpha_i = E\left[X^i\right] = \begin{cases} \sum_j x_j^i P_j & ;\ X \text{ منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x)dx; & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

$i = 0 \Longrightarrow \alpha_0 = 1$
$i = 1 \Longrightarrow \alpha_1 = E[X] = m_X$
$i = 2 \Longrightarrow \alpha_2 = E[X^2]$
$i = 3 \Longrightarrow \alpha_3 = E[X^3]$

$\vdots$

ومن أجل:

- $c = m_X$ نحصل على العزوم المركزية من المرتبة i للمتحول العشوائي X و نرمز له بالرمز μ_i

$$\mu_i = E\left[(X-m_X)^i\right] = \begin{cases} \sum_j \left(x_j^i - m_X\right)^i\ P_j & ;\ X \text{ منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_X)^i f(x)dx; & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

$i = 0 \Longrightarrow \mu_0 = 1$
$i = 1 \Longrightarrow \mu_1 = E[(X-m_X)] = E[X] - E[X] = 0 \Longrightarrow \mu_1 = 0$
$i = 2 \Longrightarrow \mu_2 = E[(X-m_X)^2] = \sigma_X^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$
$i = 3 \Longrightarrow \mu_3 = E[(X-m_X)^3] = E[X^3 - 3X^2 m_X + 3m_X^2 X - m_X^3]$

و منه نجد أن العزم المركزي من المرتبة الثالثة بدلالة العزوم الابتدائية يعطى بالشكل

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

وبحساب μ_4 نحصل على:

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$$

ويكتفى عادةً بحساب العزوم الأربعة الأولى سواءً حول المبدأ أو حول التوقع الرياضي، وهي كافيه لتعريف المقاييس المختلفة الشائعة الاستخدام. مع ملاحظة أنَّ العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم الابتدائية (الأولية) يمكن أن تُكتب بالشكل التالي:

$$\mu_r = E\left[(X-\alpha_1)^r\right] = \sum_i \left[(x_i-\alpha_1)^r\right] P_i$$

$$= \sum_i \left[\sum_{k=0}^{r} C_k^r (-\alpha_1)^k x_i^{r-k}\right] P_i$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_k^r \alpha_1^k \left(\sum_i x_i^{r-k} P_i\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_k^r \alpha_1^k \alpha_{r-k}$$

حيث: α_{r-k} العزم الأولي من الرتبة $(r-k)$. بالتالي، وبعد التبديل في العلاقة الأخيرة يكون:

$$r = o \Rightarrow \mu_0 = \alpha_0 = 1$$

$$r = 1 \Rightarrow \mu_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$r = 3 \Rightarrow \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2$$

وهكذا يمكن حساب العزوم المركزية من كافة الرتب.

التابع المولّد للعزوم Moment Generation Function:

تعرَّف الدالة المولدة للعزوم /الدالة المولدة للعزوم حول الصفر/ والتي نرمز لها بالرمز $\Psi_X(t); t \in \mathcal{R}$

$$\Psi_X(t) = E[e^{Xt}] = \begin{cases} \sum_i e^{x_i t} P_i\,; & X - \text{منفصل} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x)dx\,; & X - \text{مستمر} \end{cases}$$

خواص الدالة المولدة للعزوم:

١- $t = 0 \Rightarrow \Psi_X^{(i)}(0) = 1$

٢- $\alpha_i = \Psi_X^{(i)}(0)$

٣- $Y = aX + b \Rightarrow \Psi_Y(t) = e^{bt}\,\Psi_X(at)$

حيث:

$$\Psi_Y(t) = \Psi_{aX+b}(t) = E\left[e^{atX+bt}\right] = e^{bt}\ E\left[e^{atX}\right] = e^{bt}\ \Psi_X(at)$$

٤- إذا كان: X و Y مستقلين فانّ:

$$\Psi_{(X+Y)}(t) = \Psi_X(t)\,.\Psi_Y(t)$$

$$= E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}.e^{tY}\right] = E(e^{tX}).E(e^{tY}) = \Psi_X(t).\Psi_Y(t)$$
$$= \Psi_{(X+Y)}(t)$$

أي: الدالة المولدة للعزوم لمجموع متغيرين عشوائيين مستقلين تساوي حاصل ضرب الدالة المولدة للعزوم لكليهما.

وبالحالة العامة: من أجل n من المتغيرات المستقلة يكون:

$$\Psi_{\sum_i X_i}(t) = E\left[e^{t\sum_i X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\Psi_{X_i}(t)$$

وإذا كان لكل من: $X_i\ ;\ i=\overline{1\,,n}$ نفس الدالة المولدة للعزوم فإن:

$$\Psi_{\sum_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\Psi_{X_i}(t)$$

ومن أجل المتوسط (الوسط الحسابي):

مستقلة $X_i\ ;\quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

يكون:

$$\Psi_{\overline{X}}(t) = \Psi_{\frac{1}{n}\sum_i X_i}(t) = E\left[e^{\frac{t}{n}\sum_i X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{t}{n}X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\Psi_X\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\Psi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

مثال

إذا كانت القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنفصل X من الشكل: $X\ :1\,,2\,,3$ بحيث:

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = a$$

وكان: $Y = 2X$ عندئذٍ:

$$\Psi_Y(t) = \Psi_{2X}(t) = E(e^{2tX}) = e^{2t}.a + e^{4t}.a + e^{6t}.(1-2a)$$

التناظر Correspondence:

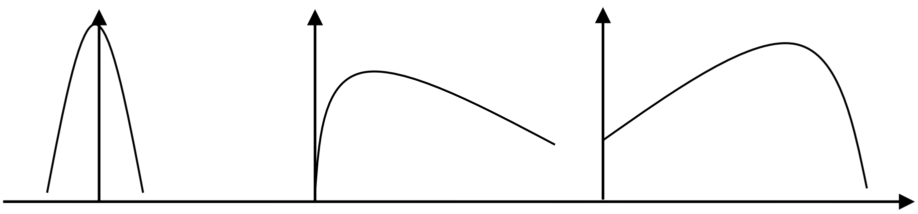
ذكرنا سابقاً أنّه إذا وجد تناظر فسوف يكون حول التوقع الرياضي حتماً، وسينطبق مركز الكتل في الصورة الميكانيكية على نقطة التناظر تلك، لذلك يعرّف التناظر دائماً بالنسبة للتوقع الرياضي كما يلي:

بفرض: X متحول عشوائي ما، توقعه الرياضي m. عندئذٍ يكون X متناظراً بالنسبة لـ m إذا كان:

X منفصل: $\forall\ x \in R\ :\ P(X = m + x) = P(X = m - x)$

X مستمر: $\forall\ x \in R\ :\ f(m + x) = f(m - x)$

وإذا لم يكن التوزيع متناظراً ، فسيكون منحرفاً (أو منحازاً) إما إلى اليمين أو إلى اليسار كما في الشكل التالي



نظرية:

إذا كان X متناظراً بالنسبة لتوقعه الرياضي m، فإن العزوم المركزية من المراتب الفردية لـ X تكون كلها معدومة، أي:

$$\mu_{2i+1} = 0\ ,\ i = 0,1,2,3,...$$

عامل التناظر:

بما أن العزوم المركزية الفردية الرتبة معدومة، فإنه من المنطقي اختيار أحدها كي نقيس به عدم التناظر في التوزيع. وبما أن ($\mu_1 = 0$ دوماً)، فقد اختير μ_3 كقياس لواقع التناظر حول التوقع الرياضي، ولكون μ_3 من الدرجة الثالثة بالنسبة لوحدات المتغير X ، فقد جرت العادة على اعتبار الكمية: $\gamma = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}\ ;\sigma \neq 0$ مقياساً لواقع التناظر.

أي: عامل التناظر هو:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\ ;\sigma \neq 0$$

فإذا كان: $\gamma = 0$ يكون التوزيع متناظراً بالنسبة لتوقعه الرياضي $m \equiv E(X)$، وإذا كان $\gamma > 0$ يكون التوزيع منحازاً (منحرفاً) نحو اليمين، ويزداد هذا الانحراف بزيادة γ، أما إذا كان $\gamma < 0$ يكون التوزيع منحازاً (منحرفاً) نحو اليسار، ويزداد هذا الانحراف كلما ابتعدت γ عن الصفر.

مثال:

بفرض تابع كثافة X من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & ,\forall x>0\\ 0 & ,\forall x\le 0\end{cases}$$

أوجد: $\gamma,\sigma^2(X),\Psi_X(t)$ (عامل التناظر).

<u>الحل:</u>

$$\Psi_X(t)=E[e^{tX}]=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{tx}.e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{(t-\frac{1}{2})x}dx$$

$$=\frac{1}{2(t-\frac{1}{2})}[e^{(t-\frac{1}{2})x}]_0^\infty=\frac{-1}{2(t-\frac{1}{2})}=(1-2t)^{-1}\ ;t<\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0=\Psi_X(0)=1\quad ,\alpha_1=\Psi'_X(0)=2\\ \alpha_2=\Psi''_X(0)=8\ ,\ \alpha_3=\Psi_X'''(0)=48\end{array}\right\}\Rightarrow \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^{\ 3}=16$$

$$\sigma^2=\alpha_2-\alpha_1^{\ 2}=4$$

$$\gamma=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{16}{8}=2$$

وبالتالي التوزيع غير متناظر، وهو ينحرف نحو اليمين بمقدار 2.

مثال:

إذا كان التابع المولد للعزوم للمتحول العشوائي X المنفصل معطى بالشكل

$$\Psi_X(t)=c+0.2e^{-t}+0.3e^{t}$$

والمطلوب:

1. أوجد جدول توزيع X ، ثم أوجد قيمة الثابت c
2. أوجد تابع التوزيع للمتحول العشوائي X، واحسب العزوم الابتدائية و العزوم المركزية حتى المرتبة الثانية
3. احسب كل من $E[X],P[X\le 0],P[X\ge 1],P\left[-\frac{1}{3}<X\le\frac{1}{2}\right]$

الحل

1. التابع المولد للعزوم للمتحول العشوائي المنفصل يعطى بالشكل

$$\Psi_X(t)=\sum_i E[e^{x_i t}]=\sum_i e^{x_i t}P_i$$

بالمقارنة مع المعطى نستطيع أن نعيد الصياغة بعد الترتيب بالشكل

$$\Psi_X(t)=0.2e^{-t}+ce^{0*t}+0.3e^{t}$$

و منه جدول توزيع X يعطى بالشكل

$\boldsymbol{X}$	-1	0	1
$\boldsymbol{P_i}$	0.2	c	0.3

من أجل تعيين قيمة الثابت c:

$$\sum_i P_i=1\Longrightarrow 0.2+\mathrm{c}+0.3=1\Rightarrow \mathbf{c}=\mathbf{0.5}$$

2. تابع التوزيع يكتب بالشكل

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.2 & -1\le x<0\\ 0.7 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<\infty\end{cases}$$

العزوم الابتدائية حتى المرتبة الثانية هي

$$\alpha_0=E[X^0]=1$$
$$\alpha_1=E[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i\ P_i=0.1$$
$$\alpha_2=E[X^2]=\sum_{i=1}^{3}x_i^2P_i=0.5$$

أما العزوم المركزية حتى المرتبة الثانية

$$\mu_0=1,\ \ \mu_1=0$$
$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=0.5-(0.1)^2=0.49$$

3.

$$E[X]=\alpha_1=0.1$$
$$P[X\le 0]=P[X=-1]+P[X=0]=0.2+0.5=0.7$$
$$P[X\ge 1]=\mathrm{P}[X=1]=0.3$$
$$P\left[-\frac{1}{3}<X\le\frac{1}{2}\right]=P[X=0]=0.5$$

مثال

X متحول عشوائي مستمر تابع كثافته يعطى بالشكل

$$f(x) = k\,(1 - x^2);\ \ \forall x \in [-1, +1]$$

والمطلوب:

1. عين قيمة الثابت k ليكون $f(x)$ تابع كثافة
2. أوجد العزوم الابتدائية و العزوم المركزية الأربعة الأولى
3. احسب قيمة عامل التناظر ، ماذا تستنتج ؟
4. إذا كان $Y = 2X - 2$ ، أوجد التوقع الرياضي و الانحراف المعياري للمتحول العشوائي Y

الحل

1. ليكون $f(x)$ تابع كثافة يجب أن يكون $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

أي $\int_{-1}^{+1} k(1 - x^2)\,dx = 1 \Rightarrow k\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

2. العزوم الابتدائية الأربعة الأولى

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = E[X] = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} x(1 - x^2)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

$$\alpha_2 = E[X^2] = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} x^2(1 - x^2)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha_3 = E[X^3] = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1} x^3(1 - x^2)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{+1} = 0$$

العزوم المركزية الأربعة الأولى

$$\mu_0 = 1,\ \ \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3 = 0$$

3. لإيجاد قيمة عامل التناظر نطبق القانون $\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$ حيث $\sigma = \sqrt[2]{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt[2]{5}}$

ومنه توزيع X متناظر بالنسبة لتوقعه الرياضي

4. $Y = 2X - 2$ ومنه

$$E[Y] = 2E[X] - 2 = -2$$

$$\sigma_Y^2 = 2^2 * \sigma_X^2 = 4 * \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

مثال

X متحول عشوائي موصوف بتابع الكثافة

$$f(x) = cx^{-5};\ \forall x \epsilon [1, \infty[$$

والمطلوب:

1. عين قيمة الثابت c ليكون $f(x)$ تابع كثافة
2. أوجد تابع التوزيع للمتحول العشوائي X
3. احسب $\alpha_i, \mu_i; i = 0,1,2,3$ ثم احسب عامل التناظر، ماذا تستنتج؟
4. احسب $P[X < 2], P[X > 6], P[X = 7], P[3 < X < 10]$
5. إذا كان $Y = \frac{X - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ ، احسب $E[Y], \sigma_Y^2$

الحل

1. ليكون $f(x)$ تابع كثافة يجب أن يكون $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_1^{\infty} cx^{-5}\, dx = 1 \Rightarrow -c\left[\frac{x^{-4}}{4}\right]_1^{\infty} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{c = 4}$$

2. تابع التوزيع للمتحول X

$$F(x) = 4\int_1^{x} x^{-5}\, dx = -[x^{-4}]_1^{x} = 1 - \frac{1}{x^{-4}}$$

3. العزوم الابتدائية تعطى بالعلاقة $\alpha_i = E\left[X^i\right]$

$$i = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 1$$

$$i = 1 \Rightarrow \alpha_1 = E[X] = 4\int_1^{\infty} x \quad x^{-5}\, dx = \frac{4}{3}$$

$$i = 2 \Rightarrow \alpha_2 = E[X^2] = 4\int_1^{\infty} x^2 x^{-5}\, dx = 2$$

$$i = 3 \Rightarrow \alpha_3 = E[X^3] = 4\int_1^{\infty} x^2 x^{-5}\, dx = 4$$

العزوم المركزية تعطى بالعلاقة $\mu_i = E\left[(X - m_X)^i\right]$

$$i = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$$
$$i = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$i = 2 \Rightarrow \mu_2 = \sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$
$$i = 3 \Rightarrow \ \mu_3 = \alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3 = \frac{20}{27}$$

لإيجاد قيمة عامل التناظر نطبق القانون $\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{20}{27}}{\frac{2}{9}*\sqrt{\frac{2}{9}}} = \frac{10}{\sqrt{2}} > 0$

توزيع المتحول X غير متناظر و منحاز نحو اليمين

4. حساب الاحتمالات التالية

$$P[X < 2] = F(2) = 1 - \frac{1}{2^4}$$
$$P[X > 6] = 1 - \mathrm{P}[X \leq 6] = 1 - \mathrm{F}(6) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6^4}\right) = 6^{-4}$$
$$P[X = 7] = 0$$
$$P[3 < X < 10] = F(10) - F(3) = \left(1 - \frac{1}{10^4}\right) - \left(1 - \frac{1}{3^4}\right) = \frac{1}{3^4} - \frac{1}{10^4}$$

5. المتحول العشوائي Y معطى بالشكل $Y = \frac{X - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

لدينا $E[X] = \frac{4}{3}$ و $\sigma^2[X] = \frac{2}{9}$ و منه الانحراف المعياري $\sigma[X] = \frac{\sqrt{2}}{3}$

ومنه $Y = \frac{X - \frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ من الشكل $Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X}$ ، أي $E[Y] = 0, \sigma^2[Y] = 1$