جامعة المنارة

كلية: الهندسة

اسم المقرر: الرياضيات المتقطعة

رقم الجلسة (الخامسة)

عنوان الجلسة

الإفاديات و المكممات

Predicates and Quantifiers

الافاديات (التقارير):

- لتكن لدينا الافادة التالية $p(x) = (x+1\leq3)$، أوجد قيمة الحقيقة للإفادات او التقارير التالية.
  p(0),p(6),p(3)
  - $p(3): 3+1 \leq 3$ False
  - $p(6): 6+1 \leq 3$ False
  - $p(0): 0+1 \leq 3$ True

- لتكن $Q(x) = (x>4)$، أوجد قيمة الحقيقة لـ Q(2),Q(5)
  - $Q(5): 5>4$ True
  - $Q(2): 2>4$ False

- لتكن $p(x,y) = (x\neq y+3)$، أوجد قيمة الحقيقة لكل من p(3,0) ,p(1,2)
  - $p(3,0): 3 \neq 0+3$ False
  - $p(1,2): 1 \neq 2+3$ True

- لتكن Q(x,y) =(x is the capital of y) ، أوجد قيمة الحقيقة لكل من
  Q(Damascus,Syria),Q(Baghdad,Lebanon)
  - Q(Damascus,Syria): Damascus is the capital of Syria True
  - Q(Baghdad,Lebanon): Baghdad is the capital of Lebanon False

التقرير الشمولي او المكمم الشمولي $\text{Universal quantifier}(\forall)$

➢ ليكن $p(x)=(x+1>x)$ ، و المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التقرير $\forall x\, p(x)$

إن العبارة P(x) صحيحة من أجل كل الأعداد الحقيقية x ، بالتالي التقرير الشمولي $\forall x\, p(x)$ يكون صحيح True .

لأن: Tp=R(أي ان مجموعة الصواب تساوي المجموعة الشاملة)

➢ ليكن $p(x)=(x^2>0)$ ومجال التعريف هو مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، أوجد قيمة الحقيقة للتقريرالشمولي $\forall x\, p(x)$.

إن p(x) تكون خاطئة من أجل x=0، و بالتالي p(x) ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح و تكون قيمة التكميم False ،حيث نجد أن: Tp≠R (أي ان مجموعة الصواب لا تساوي المجموعة الشاملة)

➢ ليكن $p(x)=(x^2<10)$ و مجال التعريف هو D={1,2,3,4}، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\, p(x)$.

إن p(x) تكون خاطئة من أجل x=4 ، و بالتالي p(x) ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح في المجموعة D و تكون قيمة التكميم False حيث نجد أن: Tp≠R (أي ان مجموعة الصواب لاتساوي المجموعة الشاملة)

المكمم الوجودي: $\text{Existence quantifier}(\exists)$

➢ ليكن $p(x)=(x>3)$ ، و المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$

إن x>3 صحيحة من أجل عدة قيم في المجموعة R ، مثلاً يوجد x=4 تكون p(4):4>3 صحيحة ، و بالتالي قيمة التكميم الوجودي $\exists x\, p(x)$ صحيحة True حيث Tp={4,5,6,7,......} .

➢ ليكن p(x)=(x+1=x) ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$.

إن p(x) خاطئة من أجل كل قيمة x من R ، و بالتالي لايوجد عنصر يحقق هذه العبارة و تكون قيمة التكميم الوجودي False .

حيث نجد أن: $Tp=\emptyset$

- ليكن $p(x)=(x^2 < 10)$ ، و مجال التعريف هو$D=\{1,2,3,4\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\, p(x)$.

يوجد على الأقل $D \ni x=3$ تحقق العلاقة $3^2 < 10$ حيث نجد $Tp = \{1,2,3\}$ وبالتالي قيمة التكميم الوجودي True

المكمم الوجودي الحصري:$(\exists!)$

- ليكن $p(x,y)=(x^3 = y)$ ، و مجال التعريف هو$D=\{1,2,3,9\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists! x\, p(x)$.

يوجد على الأقل $D \ni x=1$ تحقق العلاقة $1^3 = 1$, نجد كذلك $x = 3$; $Tp = \{1,3\}$ وبالتالي قيمة التكميم خاطئة لانها يجب ان تكون مجموعة الصواب فقط قيمة وحيدة تحقق الافادة.

أثبت أن قيمة الحقيقة للعبارات التالية المكممة شمولياً False بمثال عددي :

- $\forall x \in R,\ x > \frac{1}{x}$

من أجل $x=1 \in R$ فإن العبارة $1>1/1$ تكون خاطئة False .

- $\forall x \in Z,\ \frac{(a-1)}{a}$ *is not an integer*

من أجل $x=-1$ فإن $\frac{(-1-1)}{-1} = 2 \in Z$ و بالتالي عبارة التكميم خاطئة False .

- positive integers n and m, $n.m \geq n + m\forall$

من أجل $n=1,m=1$ تكون العبارة $1.1 \geq 1+1$ خاطئة False .

تمرين :

Let $D = \{-48, -14, -8, 0, 1, 3, 16, 23, 26, 32, 36\}$. Determine which of the following statements are true and which are false. Provide counterexamples for those statements that are false.

a. $\forall x \in D$, if x is odd then $x > 0$.
b. $\forall x \in D$, if x is less than 0 then x is even.
c. $\forall x \in D$, if x is even then $x \leq 0$.
d. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 2, then the tens digit is 3 or 4.
e. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 6, then the tens digit is 1 or 2.

الحل:

Solution:

a. True
b. True
c. False, $\exists x = 16 \in D$ is even but $x > 0$
d. True
e. False , $\exists x = 36 \in D$,ones digit=6 but tens digit=3

تمرين :

- بفرض لدينا الإفادة التالية $p(x,y)=(x+y>3)$ ومجال تعريفها D={-2,-1,0,1,2}

أوجد قيم الحقيقة للتقارير الشمولية والوجودية التالية مع التوضيح

1- $\forall x\ p(x,2)$

False , $\exists x=-2 \in D$: p(-2,2)=(-2+2<3)=(0<3)

2- $\exists x\ p(x,3)$

True , $\exists x=2\in D$: $p(2,3)=(2+3>3)=(5>3)$

4- $\forall x \forall y\ p(x,y)$

False , $\exists x=0\in D$, $\exists y=1\in D$: $p(0,1)=(0+1<3)=(1<3)$

تمرين :

Let $D = E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Explain why the following statements are true.

a. $\forall x$ in D, $\exists y$ in E such that $x + y = 0$.

b. $\exists x$ in D such that $\forall y$ in E, $x + y = y$.

الحل:

Solution:

a. $\forall x$ in D, $\exists y = -x$ in E : $x+y=x+(-x)=0$

b. $\exists x = 0$ in D, $\forall y$ in E : $0+y=y$

تمرين: أوجد نفي العبارتين وماهي القيمة المنطقية لهما :

- $\neg\forall x \in \mathbf{Z}\ (x^2>x)$

$\neg\forall x \in \mathbf{Z}\ (x^2>x) \equiv \exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2 \leq x)$ صحيحة من اجل $x=0$

- $\neg\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2=x)$

$\neg\exists x \in \mathbf{Z}\ (x^2=x) \equiv \forall x \in \mathbf{Z}\ (x^2 \neq x)$ خاطئة من اجل $x=0$

تمرين :

أوجد قيمة الحقيقة لتقارير التكميم التالية مع التعليل ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

- $\forall n \exists m\ (n^2 < m)$

True ، من أجل كل عدد صحيح n يوجد عدد m أكبر من مربعه

- $\forall n \exists m\ (n + m = 0)$

True ، من أجل كل قيمة n يوجد قيمة m=-n بحيث T={ n+m=0 .

- $\forall n \forall m\ (n^3 \neq m^2)$

False ، يوجد n=1,m=1 تكون $1^3 = 1^2$

- $\exists n \forall m\ (nm = m)$

True ، من أجل n=1 فإنه أياً كانت m فإن 1*m=m

نفي التكميم الشمولي والوجودي:

- $\neg(\forall x \forall y\ p(x,y)) \equiv \exists x \exists y \neg p(x,y)$
- $\neg(\forall y \exists x\ p(x,y)) \equiv \exists y \forall x \neg p(x,y)$
- $\neg(\forall y \forall x\ [p(x,y) \vee Q(x,y)]) \equiv \exists y \exists x \neg (p(x,y) \vee Q(x,y))$
$\equiv \exists y \exists x\ (\neg p(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$

تمرين:

أوجد قيمة الحقيقة لتقارير التكميم التالية مع التعليل بمثال ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

$$\exists n \in Z \exists m \in \mathrm{Z}\ \mathrm{p(n,m)} = (n^2 + m^2 = 5)$$

صحيحة، يوجد $n=1,m=2$ تحقق عبارة التكميم

➢ $(n+m=m+n)$ حيث $\forall n \in Z\ \forall m \in Z\ p(n,m)$

صحيحة ، من أجل كل عددين $n,m \in Z$ تتحقق علاقة الجمع التبديلية اي ان مجموعة

الصواب $Tp=Z$

➢ $\exists n \in Z\ \forall m \in Z\ (n < m^2)$

صحيحة، محققة من أجل $n=-1$ فإن مربع أي قيمة m موجب و أكبر من n

➢ $\forall n \forall m\ (if\ n^2 = m^2\ ,\ then\ n = m)$

خاطئة ، يوجد $n=-2,m=2$ تكون $2^2 = (-2)^2$ و لكن $-2 \neq 2$

سؤال 1:هل المكمم الشمولي توزيعي على الرابطة **and** اكتب مثال تدعم اجابتك:

$$\forall x \in D\ [p(x) \wedge q(x)] \equiv ?\ \forall x \in D\ p(x) \wedge \forall x \in D\ q(x)$$

الجواب:

نعم ان العبارة السابقة تكافئ

$$\forall x \in D\ [p(x) \wedge q(x)] \equiv \forall x \in D\ p(x) \wedge \forall x \in D\ q(x)$$

- مثال: اذا كانت الافادة $p(x)$ هي أن $x>=0$ والافادة $p(y)$ هي أن $x2>x$ والمجموعة الشاملة هي N فاذا كان ايا كانت x عدد طبيعي فهو اكبر او يساوي الصفر وايا كانت x عدد طبيعي فان مربعه اكبر من العدد نفسه يكافئ ان ايا كانت x عدد طبيعي فانه اكبر او يساوي الصفر ومربعه اكبرمن العدد نفسه
- $\forall x \in N\ p(x) \wedge \forall x \in N\ q(x) \equiv \forall x \in N[\ (p(x) \wedge q(x)\ )]$

سؤال 2:هل المكمم الشمولي توزيعي على الرابطة **or**

$$\forall x \in Z\ [p(x) \vee q(x)] =?\ \forall x \in Z\ p(x) \vee \forall x \in Z\ q(x)$$

الجواب:

لا ان العبارة السابقة لا تكافئ

$$\forall x \in \mathbf{Z}\ [p(x) \vee q(x)] \not\equiv \forall x \in \mathbf{Z}\ p(x) \vee \forall x \in \mathbf{Z}\ q(x)$$

ملاحظة: العكس صحيح بالنسبة للتكميم الوجودي اي انه غير توزيعي على ***and*** وتوزيعي على ***or***

تمرين شامل:

لتكن لدينا الافادة التالية ***p(x,y)*** حيث ان ***x*y=1*** والمجموعة الشاملة هي ***R***

عبر بالرموز المنطقية عن كل من العبارات المنطقية التالية وعين نتيجة الحقيقة لهما

1- لجميع قيم ***x*** فان ***x*3=1***

2- توجد قيمة ل ***y*** من ***R*** بحيث ***2*y=1***

3- توجد قيمة ل***x*** وقيمة ل ***y*** من ***R*** بحيث تكون ***x*y=1***

4- لجميع قيم ***x*** من ***R*** توجد قيمة ل***y*** من ***R*** بحيث تكون ***x*y=1***

5- ليست هي الحالة بأنه توجد قيمة ل ***x*** من ***R*** بحيث انه لجميع قيم ***y*** من ***R*** فان ***x*y=1***

6- توجد قيمة ل ***y*** من ***R*** بحيث انه ليست هي الحالة بانه لجميع قيم ***x*** من ***R*** بحيث ***x*y=1***

الحل:

1- $\forall x \in R\ p(x,3)$ وهي خاطئة

2- $\exists y \in R\ p(2,y)$ صحيحة

3- $\exists x \in R\ \ \exists y \in R\ p(x,y)$ صحيحة حيث ***Tp={(1,1)}***

4- $\forall x \in R\ \exists y \in R\ p(x,y)$ صحيحة حيث يوجد مقلوب لكل عدد حقيقي

5- $\neg(\exists x \in R\ \ \forall y \in R\ p(x,y)) \equiv \forall x \in R\ \exists y \in R \neg p(x,y)$,

وهي صحيحة

$$\exists y \in R \neg\left(\forall x \in R\ p(x,y)\right) \equiv \exists y \in R\ \ \exists x \in R \neg\ p(x,y)$$ -6

وهي صحيحة