

المحاضرة الثامنة التصميم بمساعدة الحاسب

الدكتور المهندس
تمام سلّوم



طريقة العناصر المنتهية (FEM) Finite Element Method

هناك العديد من التطبيقات لطريقة العناصر المنتهية، وأغلبها تتعلق بالهندسة الميكانيكية حيث تستخدم هذه الطريقة ضمن عملية تصميم وتطوير المنتجات المختلفة

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم الجسم المدروس الى مجموعة من العناصر المتناهية في الصغر **Elements** متصلة مع بعضها البعض بعقد **Nodes**

تقوم بعض برامج حساب العناصر المنتهية الحديثة بدراسة وحساب الاجهادات والانفعالات والتشوهات و الحرارة، المغناطيسية الكهربائية وتدفق السوائل.....، ونتبع الخطوات التالية لحل مسألة باستخدام طريقة العناصر المنتهية:



1- تعريف مقتضيات الحساب باستخدام (FEM):

وهي خطوة أساسية خلال الدراسة حيث يشكل النموذج المستخدم في الحسابات تمثيلاً مبسطاً للحقيقة الفيزيائية، ويجب أن يعبر بشكل صحيح عن الحالة الخاصة لسلوك الإنشاء المدروس حيث لا يوجد نموذج عام قادر على التعبير عن جميع قوانين السلوك الميكانيكي للمواد.



2- النمذجة Molding:

تسمح هذه الخطوة بالتحول من المسألة الحقيقية (الإنشاء في محيط العمل أو في ظروف الاستخدام) إلى النموذج الافتراضي المناسب لإجراء النمذجة العددية المستخدمة، ويجب لتوصيف النموذج العددي المستخدم القيام بالخطوتين التاليتين:

1- إنشاء النموذج الميكانيكي (mechanical model)

ويجمع هذا النموذج كل المعلومات الخاصة بالتوصيف الميكانيكي والهندسي والتقني للمسألة المدروسة، ويشمل:



- توصيف نوع التحليل **Analysis type**: ستاتيك، ديناميك، دراسة غير خطية وفيما إذا كان يمكن تمثيل سلوك الإنشاء بجائز، صفيحة، مسألة مستوية ثنائية البعد، مسألة حجمية ثلاثية البعد ...

- توصيف الشكل الهندسي للإنشاء **Geometric molding**: ويجب أن يتوافق ذلك مع نوع سلوك المادة المستخدم.

- توصيف علاقة الإنشاء المدروس بالوسط المحيط به، ويمثل ذلك بالشروط الحدية **Boundary conditions** بما فيها نقاط الاستناد والحمولات المؤثرة.

- توصيف مادة الإنشاء **Material properties** كتابع للخواص الميكانيكية للمادة (معامل يونغ، معامل بواسون، حد الخضوع، الكتلة الحجمية،...)، وبمعنى آخر جميع المقادير الضرورية لتوصيف السلوك الميكانيكي للمادة. وتتطلب هذه التوصيفات المختلفة استخدام العديد من الفرضيات.



2- نموذج التحليل بطريقة العناصر المنتهية FEM:

ويجب أن يتوافق النموذج الميكانيكي المستخدم مع العناصر المنتهية المستخدمة في الحساب، وكذلك البرنامج المستخدم، ويشمل هذا النموذج توصيف عدد معين من البارامترات الخاصة بالطريقة المستخدمة في الحساب FEM، وألغوريطات الحل المستخدمة، ويشمل هذا النموذج:

- تعريف مخطط التشبيك وهذا يعني نوع العناصر المنتهية المستخدمة، وطريقة توزيعها على الإنشاء

المدرّوس (Meshing Element type).

- ويمكن أن يشمل هذا النموذج أيضاً بارامترات أخرى تتعلق بالغلوريطات التكاملي العددي (مثلاً عدد نقاط

Gauss)، أو طرق حل معادلات التوازن (اختبار الطريقة العددية للحل، بارامترات القيادة، الألغوريطم

المستخدم في الحساب غير الخطي،...)، ويرتبط نموذج العناصر المنتهية بشكل مباشر بمعايير الدقة،

وكلفة الحساب.



3- حل المسألة (Solution):

- إذا تم اختيار النموذج الميكانيكي، ونموذج التحليل بشكل دقيق فلا حاجة في هذه المرحلة للتدخل البشري كثيراً، ولكن عندما تظهر مشاكل الحل فهي ترتبط بشكل عام بعدة أخطاء منها:
- أخطاء النمذجة الميكانيكية: مثل غياب جزئي للشروط الحدية الموافقة للإزاحات، أو نسيان أحد البارامترات
 - أخطاء النمذجة العددية: مثل استخدام عناصر منتهية ملتوية لاتحقق الشروط الهندسية المطلوبة أو اختيار سيئ لبارامترات الطريقة العددية....



وتشمل خطوات الحل مايلي:

- إنشاء المصفوفات والمتجهات العنصرية: مصفوفة الصلابة، مصفوفة الكتلة، مصفوفة التخماد، متجه القوى العقدية المكافئ للحمولات الخارجية المطبقة
- تجميع المصفوفات والمتجهات العنصرية للحصول على المصفوفات والمتجهات الإجمالية ليتم حساب الإزاحات العقدية.
- حساب الانفعالات والاجهادات.



4- إظهار وتحليل النتائج:

يحسب البرنامج الإزاحة في جميع عقد نموذج التحليل (حقل الإزاحة هو حقل عقدي)، وكذلك يحسب مركبات الانفعالات والاجهادات في جميع عناصر نموذج التحليل (حقول الاجهادات والانفعالات هي حقول عنصرية)، كما يمكن وبشكل عام الحصول على معلومات أخرى مثل الإجهادات والانفعالات الرئيسية والاتجاهات الموافقة لها، والاجهادات المكافئة **Von Mises و Deformation Stress و Displacement و Stress Principal** ويمكن أيضاً حساب مقادير أخرى مثل ردود أفعال المساند والانفعالات اللدنة ونماذج التحنيب أو نماذج الاهتراء ويتم الاختيار من بين جميع هذه المقادير تلك التي تسمح بالإجابة وبشكل أفضل عن المسألة المطروحة.



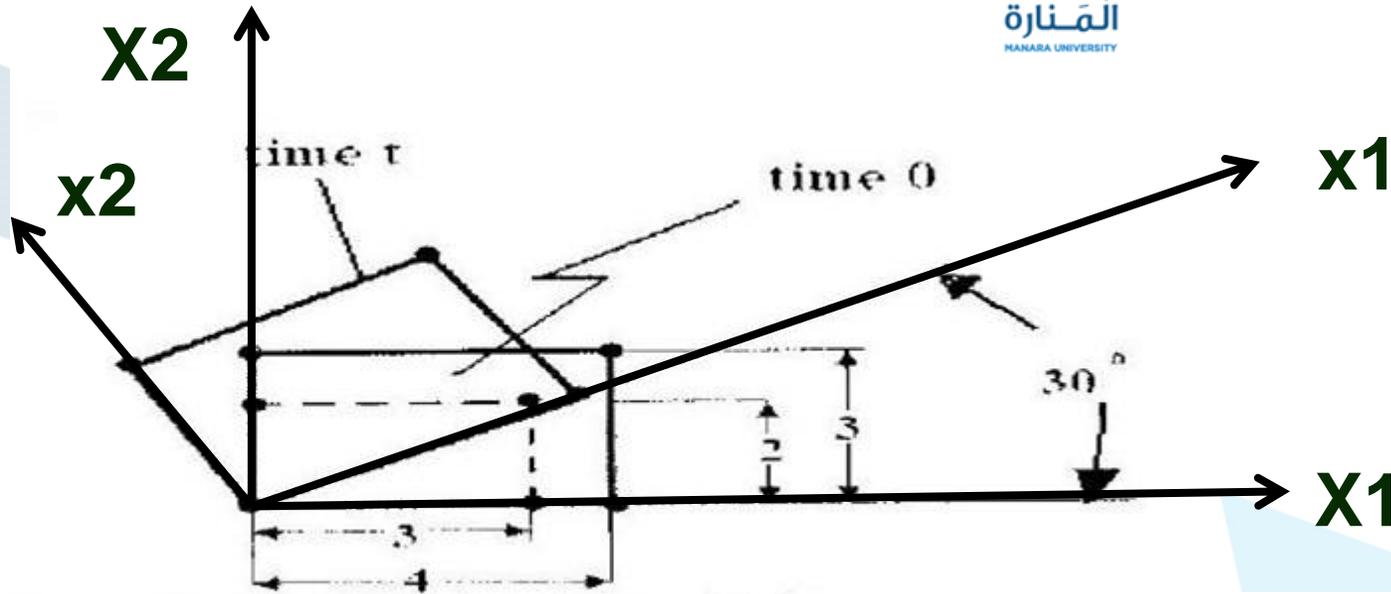
المعادلة العامة لنظرية العناصر المنتهية

$$\{F\} = [K] \{U\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{1Z} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{nX} \\ F_{nY} \\ F_{nZ} \end{array} \right\} = [K] \left\{ \begin{array}{c} U \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ U_{1Z} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{nX} \\ U_{nY} \\ U_{nZ} \end{array} \right\}$$

مصفوفة القوى في العقد F حيث
مصفوفة الصلابة K حيث
مصفوفة الازاحة في العقد U حيث





تحديد موتر الدوران R

$$R = \begin{bmatrix} \cos_{x_1}^{\lambda_1} & \cos_{x_2}^{\lambda_1} \\ \cos_{x_1}^{\lambda_2} & \cos_{x_2}^{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



موتر الإزاحة الناتج عن التشوه في الزمن 1

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} =$$

في مثالنا السابق

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + u_1 = X_1 + \frac{1}{3} X_1 = 1.333 X_1 \\ x_2 &= X_2 + u_2 = X_2 + \frac{1}{2} X_2 = 1.5 X_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} &= \frac{\partial (1.333 X_1)}{\partial X_1} = 1.333 \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} &= 0.0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} &= 0.0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_2} &= \frac{\partial (1.5 X_2)}{\partial X_2} = 1.500 \end{aligned} \right.$$



$$F = RU$$

اليميني

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = F^T F$$

موتّر كوشي - غرين C : B

اليساري

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = FF^T$$



$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (C - I)$$

ملاحظة

الجسم يسلك سلوك الجسم الجاسئ اذا كان موتور موشي غرين C متجانس وقطري
او اذا اكان $C = B = I$ و موتور غرين لاغرانج $\varepsilon = 0$



بفرض أن ρ_1, ρ_0 الكتلة الحجمية للجسم في الحالة الابتدائية غير المشوهة والحالة المشوهة على الترتيب. وبالتالي يمكن كتابة:

$$J = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \det F'$$

إذا لكتلة الحجمية في الحالة المشوهة للجسم أصغر بكثير منها في الحالة غير المشوهة ($\rho_0 > \rho_1$) وبالتالي فإن هناك تغير كبير في الخصائص الميكانيكية للجسم نتيجة للتشوه والتحليل الواجب إتباعه يجب أن يكون تحليل غير خطي ديناميكي حصراً.

