رياضيات الأعمال- المحاضرة الرابعة

Mathematics For Business

Dr. Fadi KHALIL, Dr. Ali AHMAD

في هذه المحاضرة سيتم التطرق إلى :

- مقدمة عن الانحدار Introduction for regression:
- تقدير ثوابت نموذج الانحدار
- حالات تطبيقية

1-5- مقدمة عن الانحدار Introduction for regression:

تعرفنا في المحاضرة السابقة على المعادلات من الدرجة الأولى (معادلات الخط المستقيم) كيفية تمثيلها بيانياً وكيفية حساب ميل هذا الخط المستقيم.

لكن تجدر الأشارة إلى أنه في العالم الحقيقي والبيانات الواقعية للمتغيرات الاقتصادية قد لا تتوضع الإحداثيات تماما على الخط المستقيم. أي أن العلاقة الخطية بين متغيرين اقتصاديين X و Y و المعبر عنها بمعادلة من الدرجة الأولى من الشكل:

$$ax + by = c$$

والتي يمكن كتابتها بأشكال مختلفة للتعبير عن العلاقة بين y و x كما يلي:

$$x=(c/b) - (a/b)x$$

أو

$$x= (c/a)-(b/a)y$$

قد لا تكون الحل الأمثل للتعامل مع البيانات الحقيقية. حيث قد تكون العلاقة خطية (خط مستقيم) بين متغيرين X و Y لكن إحداثيات هذين المتغيرين قد لا تتوضع تماما على الخط المستقيم الممثل للمعادلة وإنما قد يكون هناك انحرافات و انزياحات عن هذا الخط.

مثلاً: العلاقة بين الإنفاق والدخل قد يعبر عنها بالمعادلة التالية:

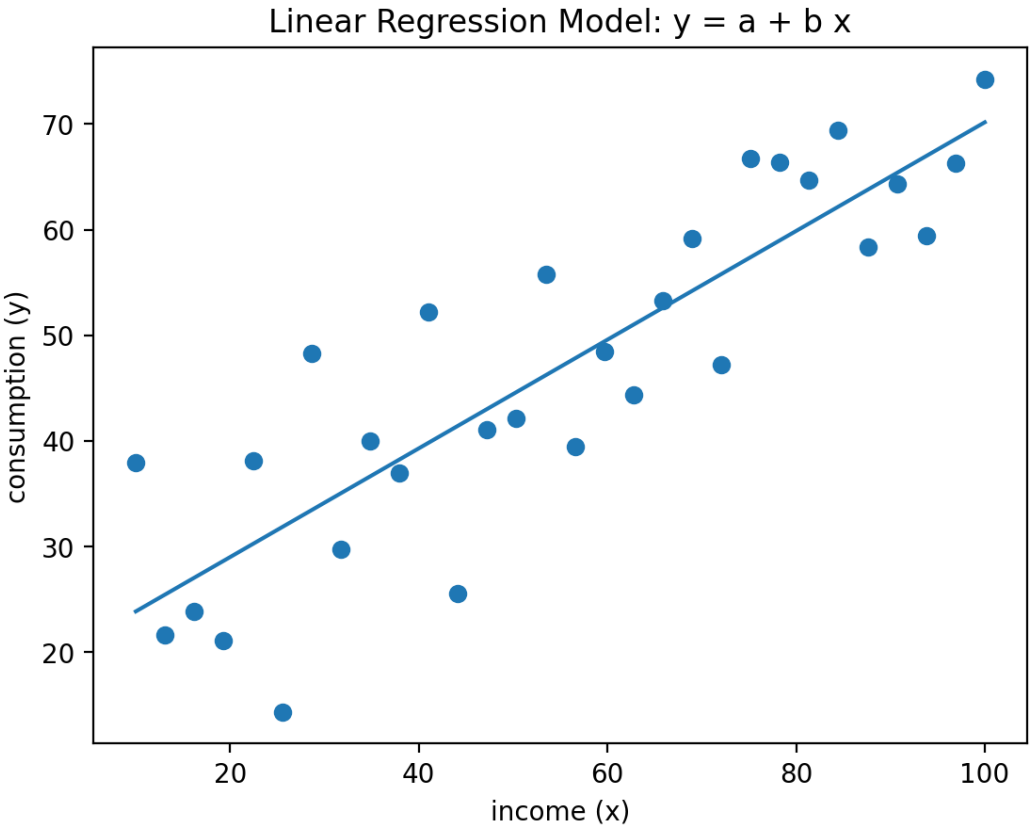
$$Y= a + b\,x$$

حيث: Y تشير إلى الإنفاق، X تشير إلى الدخل، a و b ثوابت المعادلة.

لكن إذا أخذنا عينة من الأشخاص ولتكن 30 شخص وجمعنا بيانات حول مقدار دخولهم وحجم إنفاقهم وقمنا بتمثيل البيانات التي حصلنا عليها بيانياً، انظر الشكل (1)، سنجد أن النقاط لا تتوضع بالضرورة على خط مستقيم وإنما الاتجاه العام لهذه النقاط قد يمكن اعتباره مستقيماً مع فروق معينة e يعبر عنها اصطلاحا باسم البواقي أو حد الخطأ.

التعامل مع حد الخطأ (البواقي) هو ما يفرق نموذج الانحدار عن المعادلة الرياضية للخط المستقيم لجعلها أكثر مرونة للتعامل مع البيانات الحقيقية.

الشكل1 : العلاقة بين الإنفاق و الدخل



يمكننا تعريف نموذج الانحدار الخطي بشكل مبسط كما يلي:

$$Y = a + b\,x + e$$

حيث :

y: المتغير التابع و هو المتغير الذي يتبع في تغيراته لمتغير آخر هو x (في المثال السابق الانفاق y يتبع أو يتأثر بالدخل x)

x : المتغير المستقل (المتغير المؤثر)

a : تشير إلى الحد الثابت أو القاطع (*intercept*) و هي قيمة y عندما $x=0$

b: تشير إلى معامل الانحدار أو الميل (*slope*) ، الإشارة الموجبة لمعامل الانحدار تعني أن العلاقة طردية بين x و y، الإشارة السالبة لمعامل الانحدار تعني ان العلاقة عكسية بين x و y. كما يمكن تفسير قيمة b على

الشكل التالي: إن(زيادة /انخفاض) x بمقدار وحدة واحدة سيؤدي إلى (زيادة/انخفاض) y بمقدار b وحدة **بالمتوسط**

e: حد الخطأ أو البواقي الذي يعبر عن الانحرافات بين القيم الحقيقية و القيم المتوضعة على خط الاتجاه العام (معادلة الخط المستقيم الرياضية) انظر الشكل (1). من خصائص البواقي أن مجموعها يجب ان يساوي الصفر.

1-5-1- تقدير ثوابت نموذج الانحدار:

لتقدير ثوابت نموذج الانحدار من الشكل:

$$Y = a + bx + e$$

نستخدم الصيغ التالية:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t x_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - n\,\bar{x}^2}$$

حيث:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \quad , \quad n: \text{عدد عناصر كل من } y \text{ و } x. \quad t=1,\dots,n$$

بعد تقدير قيمة معامل الانحدار، نستخدم الصيغة التالية لتقدير الحد الثابت أو القاطع:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x}$$

بعد تقدير ثوابت النموذج يصبح بإمكاننا:

- تفسير طبيعة العلاقة بين المتغيرين x و y من خلال إشارة وقيمة معامل الانحدار $\hat{b}$
- التنبؤ بقيمة y من أجل أي قيمة جديدة ل x.

1-5-2- حالات تطبيقية:

حالة تطبيقية 1:

لتكن لدينا المعلومات التالية عن أحد المشاريع الاستثمارية لإنتاج العصائر:

إيرادات المبيعات خلال الاعوام 2016-2020 كانت كما يلي:

السنة	2016	2017	2018	2019	2020
إيرادات المبيعات بالملايين	350	460	490	550	575

المطلوب:

1- تقدير ثوابت نموذج الانحدار باعتبار أن المتغير التابع y هو إيرادات المبيعات و المتغير المستقل x هو الزمن .

2- استخدم النموذج للتنبؤ بإيرادات المبيعات في العام 2021.

الحل:

1- بداية نقوم بحساب القيم والمجاميع الضرورية لتقدير ثوابت النموذج.

السنوات	الزمنX	إيرادات المبيعاتY	X^2	X.Y
2016	1	350	1	350
2017	2	460	4	920
2018	3	490	9	1470
2019	4	550	16	2200
2020	5	575	25	2875
المجموع	**15**	**2425**	**55**	**7815**

ملاحظة: نستطيع اعتبار قيم المتغير x هي السنوات نفسها، لكن من أجل سهولة الحساب اعتبرنا أن السنة 2016 هي السنة الأولى تأخذ القيمة 1 و السنة 2017 هي السنة الثانية و تأخذ القيمة 2 و هكذا بالنسبة لبقية السنوات.

نقوم بحساب المتوسطات الحسابية للمتغيرين:

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{5} y_t=\frac{1}{5}\cdot 2425=485$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{5} x_t=\frac{1}{5}\cdot 15=3$$

نقوم بتقدير الثوابت

$$\hat{b}=\frac{\sum_{t=1}^{n} y_t x_t-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2-n\,\bar{x}^2}=\frac{7815-5*3*485}{55-5*9}=54$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=485-54*3=323$$

فتكون معادلة خط الاتجاه العام المقدرة كما يلي

$$\hat{y}=323+54*X$$

نلاحظ ان قيمة معامل الانحدار المقدرة بلغت 54 وهي موجبة أي العلاقة طردية بين إيرادات المبيعات والزمن أي كلما تقدم الزمن كلما زادت المبيعات والاتجاه العام تصاعدي. وكما يمكننا تفسير قيمة معامل الانحدار بأن المبيعات تزداد بمقدار 54 مليون ل.س سنويا بالمتوسط.

ملاحظة: إذا قمنا بتعويض قيم x في النموذج المقدر سنحصل على قيم مقدرة ل y نرمز لها $\hat{y}$. الفرق بين القيم الفعلية ل y و القيم المقدرة $\hat{y}$ هو ما ندعوه حد الخطأ أو البواقي e :

$$e = y - \hat{y}.$$

مثلا لحساب القيمة الأولى للبواقي نقوم بالتالي: إذا قمنا بتعويض قيمة x في السنة الأولى في النموذج يكون لدينا:

$$e_{2016} = y_{2016} - \hat{y}_{2016}$$
$$= 350 - 323 - 54 * (1) = -27$$

والقيمة الثانية للبواقي:

$$e_{2017} = y_{2017} - \hat{y}_{2017}$$
$$= 460 - 323 - 54 * (2) = 29$$

وبقية قيم e يمكن حسابها بنفس الطريقة.

بإضافة البواقي إلى القيمة المقدرة $\hat{y}$ نحصل على القيمة الفعلية ل y:

$$Y = \hat{y} + e$$

2- للتنبؤ بإيرادات المبيعات للعام 2021 ، نعوض قيمة $x=6$ في النموذج المقدر:

$$\hat{y}=323+54*(6)=647$$

حالة تطبيقية 2:

لتكن لديك البيانات التالية عن حجم الاستثمار الزراعي x والناتج المحلي الإجمالي y في إحدى الدول (القيم بمليارات الدولارات) :

t	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
y_t	12	10	14	11	10	8	14
x_t	3	2	4	2	3	1	4

المطلوب:

1- قم بتقدير ثوابت نموذج الانحدار الخطي البسيط بحيث تفسر أثر الاستثمار الزراعي على الناتج المحلي الإجمالي.
فسر دلالة ثوابت النموذج المقدرة.

2- قدر حجم الناتج المحلي الإجمالي عندما يكون حجم الاستثمار الزراعي 5 مليار دولار.

الحل:

1- باعتبار المطلوب دراسة أثر الاستثمار الزراعي x على الناتج المحلي الإجمالي y. هذا يعني أن x هو المتغير المستقل (المؤثر) و y هو المتغير التابع (المتأثر).

نقوم بحساب القيم و المجاميع الضرورية لتقدير ثوابت النموذج.

t	y_t	x_t	$y_t x_t$	y_t^2	x_t^2
1	12	3	36	144	9
2	10	2	20	100	4
3	14	4	56	196	16
4	11	2	22	121	4
5	10	3	30	100	9
6	8	1	8	64	1
7	14	4	56	196	16
المجموع	**79**	**19**	**228**	**921**	**59**

نقوم بحساب الوسط الحسابي لكلا المتغيرين

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t=\frac{1}{7}\,79=11.285714$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t=\frac{1}{7}\,19=2.714285$$

نقوم بتقدير قيمة معامل الإنحدار

$$\hat{b}=\frac{\sum_{t=1}^{n} y_t x_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - n\,\bar{x}^2}=\frac{228-7*2.714285*11.285714}{59-7*2.714285^2}=1.826931$$

نقوم بتقدير قيمة القاطع

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=11.285714-1.826931*2.714285=6.326902$$

فيمكننا كتابة النموذج كما يلي:

$$\hat{y}=6.326902+1.826931\,x$$

يمكننا تفسير مقيمة الحد الثابت : بأن قيمة الناتج المحلي الإجمالي تساوي 6.326 بالمتوسط عندما يكون حجم الانفاق الاستثماري في القطاع الزراعي مساو للصفر.

كما و يمكننا تفسير قيمة معامل الانحدار كما يلي: الإشارة الموجبة لمعامل الانحدار تعكس العلاقة الطردية بين حجم الاستثمار الزراعي و الناتج المحلي الإجمالي. بحيث إذا ازداد الاستثمار الزراعي بمقدار وحدة واحدة (مليار دولار) فإن الناتج المحلي الإجمالي سيزداد بمقدار 1.826931 مليار دولار بالمتوسط.

2- بتعويض قيمة الاستثمار الزراعي $x=5$ في النموذج المقدر نحصل على ما يلي:

$$\hat{y} = 6.326902 + 1.826931\ (5) = 15.462$$ مليار دولار