1. المتتاليات Sequences

تُعرف المتتالية كتابع منطلقه الأعداد الطبيعية. على سبيل المثال، لتكن المتتالية:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array} \quad \text{Sequence}$$

العناصر $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ هي حدود المتتالية، الحدّ a_n هو الحدّ رقم n من المتتالية (الحد النوني)، ويُرمز للمتتالية كاملة بالرمز $\{a_n\}$.

مثال 1:

a) حدود المتتالية $\{a_n\}=\{3+(-1)^n\}$ هي:

$$\begin{array}{ccccc} 3+(-1)^1, & 3+(-1)^2, & 3+(-1)^3, & 3+(-1)^4, & \ldots \\ 2, & 4, & 2, & 4, & \ldots \end{array}$$

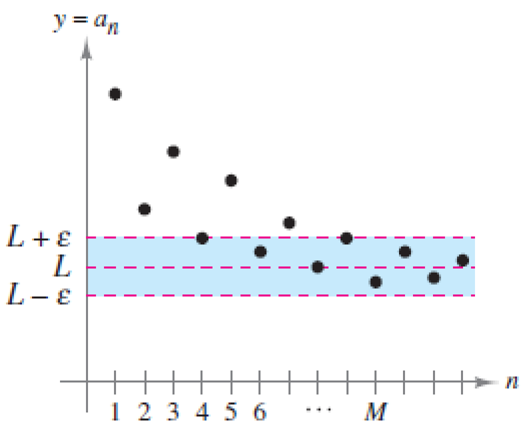
b) حدود المتتالية $\{b_n\}=\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$ هي:

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{1}{1-2(1)}, & \dfrac{2}{1-2(2)}, & \dfrac{2}{1-2(3)}, & \ldots \\ -1, & \dfrac{-2}{3}, & \dfrac{-3}{5}, & \ldots \end{array}$$

نهاية متتالية Limits of a sequence

تعريف نهاية متتالية Definition of the limit of a sequence

ليكن L عدد حقيقي، نهاية المتتالية $\{a_n\}$ تكون L حيث تكتب بالشكل $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $M > 0$ بحيث يكون $|a_n - L| < \varepsilon$ وذلك أياً كان $n > M$. إذا كانت النهاية L للمتتالية موجودة، عندها تكون المتتالية متقاربة من L. وإذا كانت نهاية المتتالية غير موجودة، عندها تكون المتتالية متباعدة diverges.



بمعنى آخر، إذا أخذنا عدد صحيح موجب تماماً $\varepsilon > 0$ (مهما يكن هذا العدد صغيراً) ، فإنه بإمكاننا ايجاد عدد $M > 0$ بحيث أنه من بعد هذا العدد ($n > M$) فإن المسافة بين L و a_n تكون أصغر من ε.

بيانياً، التعريف السابق يوضح أنه بعد حد معيّن ($n > M$ و $\varepsilon > 0$) فإنّ حدود المتتالية المتقاربة من L تتوضع بين المستقيمين: $y = L + \varepsilon$ و $y = L - \varepsilon$ كما هو موضح في الشكل السابق.

مبرهنة 1: نهاية متتالية

ليكن L عدد حقيقي، وليكن f تابع حقيقي بحيث $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية بحيث $f(x) = a_n$ من أجل كل عدد صحيح موجب عندها يكون $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.

مثال 2: أوجد نهاية المتتالية التي حدها العام $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

الحل:

نعلم سابقاً أنّ $e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. لذا نستطيع تطبيق المبرهنة السابقة لنستنتج أنّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

مبرهنة 2: خواص نهايات متتاليات Properties of Limits of Sequences

ليكن $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ وليكن $\lim_{n\to\infty} b_n = k$ عنها يكون:

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm k$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c L , \quad c \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = Lk$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{k}, \quad k \neq 0, b_n \neq 0$

مثال 3: حدد فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أو متباعدة

a) بما أن حدود المتتالية $\{a_n\} = \{3 + (-1)^n\}$ تتناوب بين الـ 2 و الـ 4 (2, 4, 2, 4, ...) فإنّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة، وبالتالي المتتالية متباعدة.

b) المتتالية $\{b_n\} = \left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$. بتقسم البسط والمقام على n نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right) - 2} = \frac{-1}{2}$$

إذاً المتتالية متقاربة من $\dfrac{-1}{2}$.

مثال 4: بيّن أنّ المتتالية التي حدها العام $a_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$ متقاربة.

الحل:

ليكن لدينا التابع الحقيقي f بحيث $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x - 1}$. بتطبيق قاعدة أوبيتال مرتين ينتج لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2^x - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{(\ln 2)\, 2^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\ln 2) 2^x} = 0$$

وبما أن $f(x) = a_n$ من من أجل كل عدد صحيح موجب بالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n - 1} = 0$.

مبرهنة 3: مبرهنة الإحاطة Squeeze Theorem

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ وكان يوجد عدد صحيح موجب N بحيث $a_n \le c_n \le b_n$ وذلك أياً كانت $n \ge N$ عندها $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

مثال 5: أثبت أنّ المتتالية $\{c_n\} = \left\{(-1)^n \dfrac{1}{n!}\right\}$ متقاربة، وأوجد نهايتها

الحل:

لتطبيق مبرهنة الإحاطة علينا إيجاد متتاليتين متقاربتين من نفس العدد ومتعلقتان بالمتتالية المعطاة. يمكن أن نختار $a_n = \dfrac{-1}{2^n}$ و $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ كلاهما متقارب من الـ 0. بمقارنة $n!$ و 2^n نلاحظ أنّ:

$$n! = 1\times2\times3\times4\times5\times\ldots\times n = 24\times\underbrace{5\times6\times\ldots\times n}_{n-4}$$

$$2^n = 2\times2\times2\times2\times2\times\ldots\times2 = 16\times\underbrace{2\times2\times\ldots\times2}_{n-4}$$

ومنه نستنتج أنه من أجل $n \ge 4$ يكون $2^n < n!$. بالتالي:

$$\frac{-1}{2^n} \le (-1)^n \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n}, \quad n \ge 4$$

وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n!} = 0$.

من الملاحظ أن المتتالية السابقة $\{c_n\}$ مؤلفة من حدود موجبة وحدود سالبة. إذا أوجدنا متتالية القيمة المطلقة لهذه المتتالية $\{|c_n|\}$ نلاحظ أنها تتقارب من الـ 0 أيضاً وذلك بحصرها من متتاليتين $0 \le \dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^n}, n \ge 4$. في مثل هذه الحالة غالباً ما يكون من الأسهل دراسة متتالية القيمة المطلقة ومن ثم تطبيق المبرهنة أدناه.

مبرهنة 4: مبرهنة القيمة المطلقة Absolute Value Theorem

من أجل المتتالية $\{a_n\}$ إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ عندها يكون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

التعرف على الحد العام لمتتالية Finding the nth Term of a Sequence

في بعض الأحيان فإن حدود المتتالية تُوَلد ببعض القواعد التي لا تُعطى صراحة في الحد العام للمتتالية، في مثل هذه الحالات يمكن أن يُطلب منّا إيجاد حدها العام a_n، وعندما نحدد الحد العام يصبح بالإمكان تحديد التقارب أو عدم التقارب للمتتالية.

مثال 6: أوجد المتتالية $\{a_n\}$ والتي حدودها الخمسة الأولى هي: $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$ وحدد فيما إذا كانت هذه المتتالية متقاربة أو متباعدة.

الحل:

نلاحظ أنّ البسط هو عبارة عن تتالٍ لقوى العدد 2 وأنّ المقام هو عدد صحيح موجب فردي. بمقارنة a_n مع n نحصل على:

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1}$$

وباستخدام قاعدة أوبيتال لحساب نهاية التابع $f(x) = \frac{2^x}{2x-1}$ نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{2x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2^x \ln 2}{2} = \infty$$

بالتالي $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2n-1} = \infty$ والمتتالية متباعدة.

مثال 7: أوجد الحد العام للمتتالية التي حدودها الخمسة الأولى هي: $\frac{-2}{1}, \frac{8}{2}, \frac{-26}{6}, \frac{80}{24}, \frac{-242}{120}$ واستنتج فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أو متباعدة.

الحل:

نلاحظ أنّ البسط في كل حد هو $3^n - 1$، أما المقام:

$$1=1!$$
$$2=1\times2=2!$$
$$6=1\times2\times3=3!$$
$$24=1\times2\times3\times4=4!$$
$$120=1\times2\times3\times4\times5=5!$$

بالتالي فإنّ المقام هو $n!$ ، وبما أنّ الحدود متناوبة بالإشارة فهي مضروبة بـ $(-1)^n$. أي أن:

$$a_n=(-1)^n\left(\frac{3^n-1}{n!}\right)$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{n!}=0$ ، فإن المتتالية متقاربة بالإطلاق من الصفر وبالتالي $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. إذاً المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من الـ 0.

المتتاليات المطردة والمتتاليات المحدودة Monotonic Sequences and Bounded Sequences

تعريف المتتاليات المطردة Definition Of Monotonic Sequence

نقول عن متتالية $\{a_n\}$ أنها مطردة (متزايدة أو متناقصة) إذا تحقق $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n\le\ldots$ (متزايدة) أو $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots$ (متناقصة).

مثال 8: حدد فيما إذا كانت كل من المتتاليات التالية مطردة أم لا.

$a)\ a_n=3+(-1)^n \qquad b)\ b_n=\dfrac{2n}{1+n} \qquad c)\ c_n=\dfrac{n^2}{2^n-1}$

الحل:

a) هذه المتتالية متناوبة بين الـ 2 و الـ 4 بالتالي فهي غير مطردة.

b) المتتالية مطردة لأن كل حد أكبر من الحد الذي قبلة، وللتأكد من ذلك يمكننا مقارنة b_n مع b_{n+1}

$$b_n=\frac{2n}{1+n}\overset{?}{<}\frac{2(n+1)}{1+(n+1)}=b_{n+1}$$

$$\frac{2n}{1+n} \overset{?}{<} \frac{2n+2}{2+n}$$

وبما أنّ n موجبة فإننا نستطيع ضرب طرفي المتراجحة بـ $(1+2)(2+n)$ ينتج:

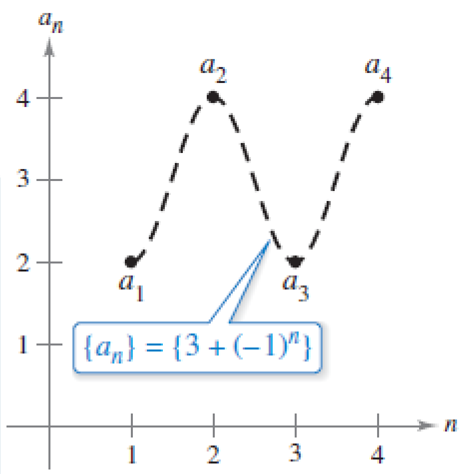
$$2n(2+n) \overset{?}{<} (2n+2)(1+n)$$

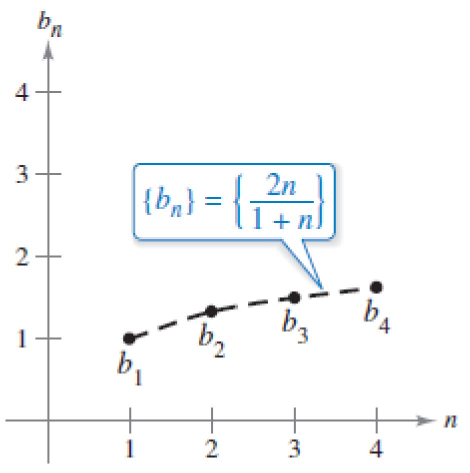
$$4n+2n^2 \overset{?}{<} 2+4n+2n^2$$

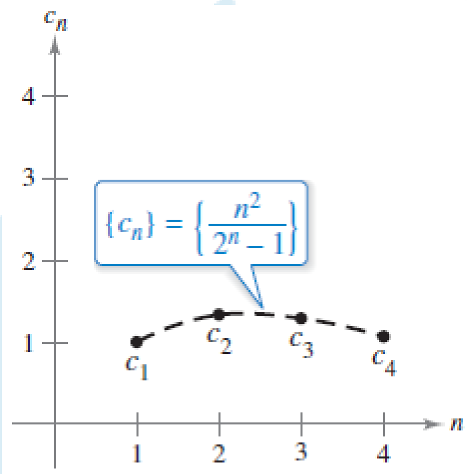
$$0<2$$

والمتراجحة محققة، بالتالي المتتالية b_n مطردة.

c) المتتالية $\{c_n\}$ ليست مطردة لأن الحد الثاني أكبر من الحد الأول وأكبر من الحد الثالث أيضاً. (لاحظ أنه إذا حذفنا الحد الأول تصبح المتتالية $c_2, c_3, c_4, \ldots$ مطردة).







تعريف المتتاليات المحدودة Definition Of Bounded Sequences

1. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى bounded above إذا وجِد عدد حقيقي M بحيث يكون $a_n \le M$ وذلك من أجل جميع قيم n. نسمي M في هذه الحالة الحد الأعلى للمتتالية upper bound.
2. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى bounded below إذا وجِد عدد حقيقي N بحيث يكون $a_n \le N$ وذلك من أجل جميع قيم n. نسمي N في هذه الحالة الحد الأعلى للمتتالية lower bound.
3. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة bounded إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

جميع المتتاليات في المثال السابق هي متتاليات محدودة:

$$2 \le a_n \le 4, \quad 1 \le b_n \le 2, \quad 0 \le c_n \le \frac{4}{3}$$

مبرهنة 5: مبرهنة المتتاليات المطردة المحدودة Bounded Monotonic Sequences

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة ومطردة تكون متقاربة.

مثال 9:

a) المتتالية $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ مطردة ومحدودة فحسب المبرهنة السابقة هي متقاربة.

b) المتتالية المتباعدة $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{(n+1)}\right\}$ مطردة ولكنها غير محدودة (محدودة من الأدنى فقط).

c) المتتالية المتباعدة $\{c_n\} = \left\{(-1)^n\right\}$ محدودة لكنها غير مطردة.

2. السلاسل والتقارب Series and Convergence

السلاسل اللانهائية Infinite Series

إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية لانهائية عندها تكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

سلسلة لانهائية (أو للاختصار سلسلة). الأعداد a_1, a_2, a_3 هي أعداد السلسلة.

في بعض السلاسل يكون من الأنسب أن نبدأ الدليل من $n = 0$ (أو أي عدد صحيح).

اصطلاحاً نرمز للسلسلة اللانهائية بالشكل $\sum a_n$.

لإيجاد مجموع سلسلة لانهائية، نأخذ متتالية المجاميع الجزئية Sequence of partial sum التالية:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n
\end{aligned}
$$

اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية السابقة متقاربة عندها تكون السلسلة متقاربة، والمجموع يحدده التعريف التالي:

تعريف تقارب وتباعد سلسلة Definitions of Convergent and Divergent Series

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة لانهائية، الحد النوني للمجاميع الجزئية يعطى بالعلاقة $S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$. إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة من عدد S عندها تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة. وتدعى النهاية S بـ مجموع السلسلة: $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة عندها تكون السلسلة متباعدة.

مثال 10:

a) للسلسلة $\ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ المجاميع الجزئية:

$$S_1=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\vdots$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$$

وبما أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$ فإنّ السلسلة متقاربة ومجموعها يساوي 1.

b) المجموع الجزئي ذو الدليل n للسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

يعطى بالعلاقة: $S_n=1-\frac{1}{n+1}$، وبما أن نهاية S_n هي 1 فإن السلسلة متقاربة ومجموعها يساوي 1.

c) السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+1+\ldots$ متباعدة لأن $S_n=n$ وسلسلة المجاميع الجزئية متباعدة.

مثال 11: أوجد مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

الحل:

باستخدام تفريق الكسور يمكن أن نكتب:

$$a_n=\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

المجموع الجزئي ذو الحد n هو:

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}$$

لذا فإن السلسلة متقاربة ومجموعها هو

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

السلاسل الهندسية Geometric Series

بشكل عام السلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots,\quad a\neq 0$ هي سلسلة هندسية اساسها r.

مبرهنة 6: تقارب سلسلة هندسية Convergence of a Geometric Series

تكون السلسلة الهندسية التي اساسها r متباعدة إذا كان $|r|\geq 1$. إذا كان $0<|r|<1$ عندها تكون السلسلة متقاربة من المجموع $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=\frac{a}{1-r}$.

مثال 11:

a) السلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n=3(1)+3\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$ لها الأساس $r=\frac{1}{2}$ و $a=3$. بما أن $0<|r|<1$ فالسلسلة متقاربة ومجموعها هو $S=\frac{a}{1-r}=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$.

b) السلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots$ لها الأساس $r=\frac{3}{2}$، وبما أنّ $|r|\geq 1$ فإن السلسلة متباعدة.

مثال 12: استخدم السلسلة الهندسية لكتابة العدد الدوري $0.\overline{08}$ كنسبة عددين صحيحين.

الحل:

يمكن كتابة العدد الدوري $0.\overline{08}$ بالشكل:

$$0.08080808\cdots = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right)\left(\frac{1}{10^2}\right)^n$$

وهي سلسلة هندسية، حيث $r = \frac{1}{10^2}$ و $a = \frac{8}{10^2}$. بالتالي:

$$0.08080808\cdots = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{8}{10^2}}{1-\left(\frac{1}{10^2}\right)} = \frac{8}{99}$$

ملاحظة: تقارب سلسلة لا يتأثر بحذف عدد منتهٍ من الحدود من بداية السلسلة. على سبيل المثال السلسلتان الهندسيتان:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

كلاهما متقارب. من ناحية أخرى بما أن مجموع السلسلة الثانية هو $\frac{a}{1-r} = 2$ ، بالتالي نستطيع استنتاج أن مجموع السلسلة الأولى هو:

$$S = 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$$

مبرهنة 7: خصائص السلاسل اللانهائية Properties of Infinite Series

لتكن $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سلسلتان متقاربتان ولتكن A, B, C أعداد حقيقية. إذا كان $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ عندها:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = CA$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = A - B$

اختبار الحد النوني للتباعد nth-Term Test for Divergence

مبرهنة 8: نهاية الحد النوني للسلاسل المتقاربة Limit of the nth Term of a Convergent Series

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، عندها يكون $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ملاحظة هامة: عكس المبرهنة السابقة ليس صحيحاً في الحالة العامة. أي أنه اذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من 0 عندها السلسلة $\sum a_n$ يمكن أن تكون متقاربة ويمكن أن تكون متباعدة.

وهذا يقودنا إلى اختبار مفيد للتباعد.

اختبار الحد النوني للتباعد ينص على أنه اذا كانت نهاية الحد النوني لسلسلة لا يتقارب من الـ(0) عندها يجب أن تكون السلسلة متباعدة.

مبرهنة 9: اختبار الحد النوني للتباعد nth-Term Test for Divergence

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ عندها تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

مثال 13:

a) من أجل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ لدينا $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$. بما أن نهاية الحد النوني ليست 0، بالتالي السلسلة متباعدة.

b) من أجل السلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$ لدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n!+1} = \frac{1}{2}$. بما أن نهاية الحد النوني ليست 0، بالتالي السلسلة متباعدة.

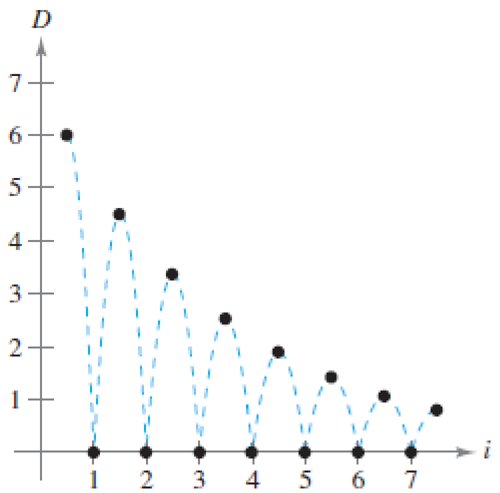
c) من اجل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ لدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. بما أن نهاية الحد النوني هي 0 لا يمكن تطبيق اختبار الحد النوني للتباعد ولا يمكننا أن نقرر فيما اذا كانت السلسلة متباعدة أم متقاربة.

نسمي السلسلة في المثال الأخير بالسلسلة التوافقية

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

سنجد لاحقاً أن هذه السلسلة متباعدة بالرغم من أن حدها النوني يسعى الى الـ 0 عندما تسعى n إلى الـ ∞.

مثال 14: ارتداد كُرة.



تُرمى كرة من ارتفاع 6 أمتار فتصطدم بالأرض وتبدأ بالارتداد، بحيث أن ارتفاع كل ارتداد يُعادل ثلاثة أرباع ارتفاع الارتداد السابق. أوجد المسافة الشاقولية الكلية التي تقطعها الكرة أثناء حركتها السابقة.

الحل:

عندما تصطدم الكرة بالأرض للمرّة الأولى فإنها تكون قد قطعت مسافة شاقولية $D_1=6\,\text{meters}$. من أجل الارتدادات اللاحقة، لتكن D_i المسافة التي تقطعها الكرة في كل ارتداد (للأعلى والأسفل معاً).

على سبيل المثال:

$$D_2=6\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)=12\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$D_3=6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+6\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=12\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

وبمتابعة نفس العملية، يمكن تحديد المسافة الشاقولية التي تقطعها الكرة كالتالي:

$$D=6+12\left(\frac{3}{4}\right)+12\left(\frac{3}{4}\right)^2+12\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots=6+12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$=6+12\left(\frac{3}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=6+9\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)=6+9(4)=42\text{ m}$$

سلاسل من النوع p والسلسلة التو افقية p-Series and Harmonic Series

نسمي سلسلة من النوع p السلاسل من الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}=\frac{1}{1^{p}}+\frac{1}{2^{p}}+\frac{1}{3^{p}}+\frac{1}{4^{p}}+\cdots$$

حيث p عدد صحيح موجب. وعندما تكون $p=1$ نحصل على السلسلة التوافقية

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

مبرهنة 10: تقارب السلاسل من النوع p Convergence of p-Series

السلاسل من النوع p متقاربة من أجل $p>1$ ومتباعدة من أجل $0<p\leq 1$.

3. مقارنة السلاسل Comparisons of Series

اختبار المقارنة المباشر Direct Comparison Test

يسمح لنا هذا الاختبار بمقارنة سلسلة حدودها معقدة بسلسلة أخرى مشابهة لها لكن حدودها أبسط ونعلم عنها تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة 11: اختبار المقارنة المباشر Direct Comparison Test

لتكن $0<a_n<b_n$ وذلك من أجل جميع قيم n عندها يكون:

1. إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، عندها تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة.
2. إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة، عندها تكون $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

مثال 15: حدد فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+3^{n}}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

هذه السلسلة تشبه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}$.

بمقارنة حدود هذه السلسلة مع السلسلة المفروضة حداً بحد نجد: $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n$. وحسب اختبار المقارنة المباشر نستنتج أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ متقاربة.

مثال 16: حدد فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

السلسلة المفروضة تشبه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. وبمقارنة حدود السلسلتين حداً الى حد نجد:

$$\frac{1}{2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 0$$

لقد توصلنا الى نتيجة لا تفيدنا في تحديد تقارب أو تباعد السلسلة.

يمكن مقارنة السلسلة المفروضة بالسلسلة التوافقية المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. وبمقارنة حدود السلسلتين حداً الى حد نجد:

$$a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2+\sqrt{n}} = b_n, \quad n \geq 4$$

وحسب اختبار المقارنة المباشر نستنتج أن السلسلة $\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ متباعدة.

ملاحظة: تذكر أن اختبار المقارنة المباشر يتطلب أن تكون $0 \leq a_n \leq b_n$.

بشكل عام وبكلمات أبسط فإن الاختبار ينص على أنه من أجل سلسلتين حدودهما موجبة يكون:

1. اذا كانت السلسلة الكبيرة متقاربة فإن السلسلة الصغيرة يجب أن تكون متقاربة أيضاً.
2. اذا كانت السلسلة الصغيرة متباعدة فإن السلسلة الكبيرة يجب أن تكون متباعدة أيضاً.

اختبار المقارنة بالنهاية Limit Comparison Test

مبرهنة 12: اختبار المقارنة بالنهاية Limit Comparison Test

بفرض $a_n > 0$ و $b_n > 0$ وبفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$ ، حيث L هو عدد حقيقي موجب. عندها يكون $\sum a_n$ و $\sum b_n$ لهما نفس الطبيعة أي كلاهما متقارب أو كلاهما متباعد.

مثال 17: أثبت أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+b}, \quad a,b>0$ (السلسلة التوافقية العامة General Harmonic Series) متباعدة.

الحل:

بالمقارنة مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(a_n+b)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n+b} = \frac{1}{a}$$

بما أن هذه النهاية أكبر من الـ 0 نستنتج أن السلسلة المعطاة متباعدة وذلك حسب اختبار المقارنة بالنهاية.

إن اختبار المقارنة بالنهاية مفيد جداً في حالة مقارنة السلسلة مع السلاسل من النوع p: $\sum\frac{1}{n^p}$ ، حيث يجب أن نختار سلسلة حدها النوني بنفس درجة الحد النوني للسلسلة المعطاة.

مثال 18: حدد فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ متباعدة أم متقاربة

الحل:

بتجاهل جميع الحدود من البسط والمقام عدا الحد الأعلى درجة وبالمقارنة مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ،

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^{2+1}} = 1$ نستنتج أن السلسلة المعطاة متقاربة.

مثال 19:

حدد اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,2^n}{4n^3+1}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

منطقياً، فإن المقارنة تكون مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ (متباعدة حسب اختبار الحد النوني). وبحسب النهاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,2^n}{4n^3+1}\right)\left(\frac{n^2}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4+\left(\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{1}{4}$$

نستنتج أن السلسلة المعطاة متباعدة.

4. السلاسل المتناوبة Alternating Series

السلاسل المتناوبة هي السلاسل التي تكون حدودها متناوبة بالإشارة، على سبيل المثال السلسلة الهندسية التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$$

وهي سلسلة هندسية متناوبة أساسها $r=\frac{-1}{2}$

مبرهنة 13: اختبار السلاسل المتناوبة Alternating Series Test

لتكن $a_n>0$ فتكون السلسلتان المتناوبتان $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متقاربتان إذا تحقق الشرطين التاليين معاً:

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$
2. $a_{n+1}\le a_n,\quad \forall n$

مثال 20: حدد فيما إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

لاحظ أنّ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to 8} \frac{1}{n} = 0$

إذاً الشرط الأول محقق، كما أن الشرط الثاني محقق لأن $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = a_n$ من أجل جميع قيم n، وبالتالي

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ متقاربة.

مثال 21: حدد فيما إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

من أجل $n \ge 1$ لدينا

$$\frac{1}{2} \le \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{2^{n-1}}{2^n} \le \frac{n}{n+1}$$

$$(n+1)2^{n-1} \le n\,2^n$$

$$\frac{n+1}{2^n} \le \frac{n}{2^{n-1}}$$

اذاً $a_{n+1} = \frac{(n+1)}{2^n} \le \frac{n}{2^{n-1}} = a_n$ وذلك من أجل جميع قيم n. إضافة على ذلك، وباستخدام قاعدة أوبيتال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{x-1}(\ln 2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 0$$

وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}}$ متقاربة.

مثال22 :

a) ألسلسلة المتناوبة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n} = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots$$

تحقق الشرط الثاني من شروط مبرهنة اختبار السلاسل المتناوبة وذلك لأنه من جميع قيم n يكون $a_{n+1} \le a_n$. ولكن لا يمكن تطبيق اختبار السلاسل المتناوبة لأن الشرط الأول غير محقق.

b) السلسلة المتناوبة التالية:

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$$

تحقق الشرط الأول من اختبار السلاسل المتناوبة وذلك لأن a_n يسعى الى الـ0 عندما $n \to \infty$. لكن لا نستطيع تطبيق اختبار السلاسل المتناوبة لأن السلسلة لا تحقق الشرط الثاني.

باقي السلاسل المتناوبة Alternating Series Remainder

من أجل السلاسل المتناوبة المتقاربة فإنّ المجاميع الجزئية S_N يمكن أنّ يكون تقريب مفيد للمجموع S للسلسلة، ونعلم أن كل تقريب فيه خطأ (ارتياب) عن القيمة الأصلية وفي التقريب $(S \approx S_N)$ فإن الخطأ هو الباقي:

$$R_N = S - S_N$$

مبرهنة 14: اختبار باقي السلاسل المتناوبة Alternating Series Remainder

إذا حققت سلسلة متناوبة متقاربة الشرط $a_{n+1} \le a_n$ عندها تكون القيمة المطلقة للباقي R_N (الناتج عن تقريب المجموع S بـ S_N) أصغر أو يساوي الحدود المهملة، أي أنّ: $|S - S_N| = |R_N| \le a_{n+1}$.

مثال 23: قرب مجموع السلسلة $\cdots - \frac{1}{5!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)$ لحدودها الستة الأولى.

الحل:

حسب اختبار السلاسل المتناوبة فإن السلسلة متقاربة وذلك لأن: $\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n!} \text{ and } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$.

مجموع الحدود الستة الأولى هو:

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{91}{144} \approx 0.63194$$

وبحسب باقي السلسلة المتناوبة لدينا: $|S - S_6| = |R_6| \le a_7 = \frac{1}{5040} \approx 0.0002$. لذلك فإن المجموع S يقع بين القيمتين $0.63194 - 0.0002$ و $0.63194 + 0.0002$، أي:

$$0.63174 \le S \le 0.63214$$

التقارب الشرطي والمطلق Absolute and Conditional Convergence

في بعض الأحيان يمكن لسلسلة أن تكون حدودها موجبة وسالبة لكن بشكل غير متناوب. على سبيل المثال السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \cdots$$

فيها حدود موجبة وفيها حدود سالبة لكن بشكل غير متناوب. إحدى الطرق لمعرفة فيما إذا كانت مثل هذه السلاسل متقاربة أم لا هي دراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin\ n}{n^2}\right|$ بالمقارنة المباشرة. لدينا $|\sin n| \le 1$ من أجل جميع قيم n، بالتالي $n \ge 1, \quad \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. بحسب اختبار المقارنة المباشرة فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ متقاربة.

مبرهنة 15: التقارب بالإطلاق Absolute Convergence

اذا كانت السلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة عندها تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة أيضاً.

ملاحظة: عكس المبرهنة السابقة غير صحيح. على سبيل المثال، السلسلة التوافقية المتناوبة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

متقاربة، وذلك حسب اختبار السلاسل المتناوبة لكن السلسلة التوافقية متباعدة.

تعريف التقارب الشرطي والمطلق Definition of absolute and conditional convergence

1. تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق absolutely convergent إذا كانت السلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة.
2. تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة شرطياً Conditionally Convergent إذا كانت السلسلة $\sum a_n$ متقاربة لكن $\sum |a_n|$ متباعدة.

مثال 24: صنف كل سلسلة حسب تقاربها، تقارب بالإطلاق أو تقارب شرطي.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \frac{0!}{2^0} - \frac{1!}{2^1} + \frac{2!}{2^2} - \cdots$$

$$\text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

الحل:

a) من اختبار الحد النوني نستنتج أن السلسلة متباعدة.

b) يمكن أن نبين أن السلسلة المعطاة متقاربة وذلك حسب اختبار السلسلة المتناوبة. لكن السلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

متباعدة، بالتالي السلسلة المعطاة متقاربة شرطياً.

مثال 25: صنف كل سلسلة حسب تقاربها، تقارب بالإطلاق أو تقارب شرطي

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\cdots$$

$$\text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}=-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}-\cdots$$

الحل:

a) هذه السلسلة ليست متناوبة، مع ذلك بما أنّ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3^n}\right|$ هي سلسلة هندسية متقاربة، اذاً نستطيع تطبيق مبرهنة التقارب بالإطلاق لنستنتج أن السلسلة المعطاة هي سلسلة متقاربة بالإطلاق وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة.

b) في هذه الحالة، ان اختبار السلسلة المتناوبة لا يعطينا أي نتيجة حول تقارب أو تباعد السلسلة، لكن السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right|=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\cdots$$

متباعدة وذلك بمقارنة السلسلة بحدود سلسلة توافقية وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة شرطياً.

5. اختبارات النسبة والجذور The Ratio and Root Tests

اختبار النسبة The Ratio Test

مبرهنة 16: اختبار النسبة The Ratio Test

لتكن $\sum a_n$ سلسلة حدودها غير معدومة

1. تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$.
2. تكون السلسلة $\sum a_n$ متباعدة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ أو $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$.
3. اختبار النسبة لا يعطي نتيجة إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

ملاحظة: اختبار النسبة غير مفيد ولا يعطينا نتيجة في الحالة التي يكون فيها $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$، ويظهر ذلك بوضوح من خلال السلسلتين:

- السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة و $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.
- السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$.

مثال 26: حدد فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

بما أن $a_n=\frac{2^n}{n!}$ يمكن أن نكتب:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{2^n}{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

والسلسلة المعطاة متقاربة.

مثال 27: حدد فيما اذا كانت كل من السلاسل التالية متقاربة او متباعدة :

$$a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\ 2^{n+1}}{3^n} \qquad\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$$

الحل:

a) هذه السلسلة متقاربة لأن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ، حيث أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^2\left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\left(\frac{3^n}{n^2\ 2^{n+1}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{3n^2}=\frac{2}{3}<1$$

b) هذه السلسلة متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ حيث أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)}\left(\frac{1}{n^n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

مثال 28: بين فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right]=\sqrt{1}(1)=1$$

اذاً اختبار النسبة غير مفيد في هذه الحالة. لتحديد فيما اذا كانت السلسة متقاربة أم متباعدة فنحن بحاجة الى استخدام اختبار آخر. وفي حالتنا هذه نستطيع تطبيق اختبار السلاسل المتناوبة لنثبت أن $a_{n+1}<a_n$. لنفرض أن:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

وبما أن المشتق سالب من أجل قيم $x>1$ فإن التابع f مناقص. وبحسب قاعدة أوبتال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/2\sqrt{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

وبالتالي وبحسب اختبار السلاسب المتقاربة تكون السلسلة المفروضة متقاربة.

اختبار الجذر The Root Test

مبرهنة 17: اختبار الجذر The Root Test

لتكن $\sum a_n$ سلسلة حدودها غير معدومة

1. تكون السلسلة $\sum a_n$ متقاربة بالإطلاق اذا كان $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$.
2. تكون السلسلة $\sum a_n$ متباعدة اذا كان $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$ أو $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$.
3. اختبار النسبة لا يعطي نتيجة إذا كانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$.

مثال 29: بين فيما اذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$ متقاربة أم متباعدة

الحل:

يمكن أن نطبق اختبار الجذر كما يلي:

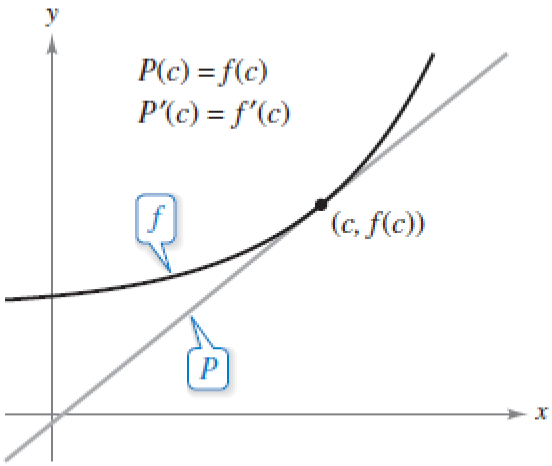
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n}=0<1$$

بما أن النهاية أقل من 1، نستنج أن السلسلة المعطاة متقاربة بالإطلاق وبالتالي فهي متقاربة.

6. كثيرات حدود تايلوروالتقريبات Taylor Polynomial And Approximations

تقريبات كثيرات الحدود للتوابع الأولية Polynomial Approx. of Elementary Functions

لإيجاد كثير حدود P والذي هو تقريب لتابع آخر f، نبدأ باختيار عدد c ينتمي إلى مجال تعريف f بحيث يكون لـ f و P نفس القيمة عند النقطة c، أي $P(c)=f(c)$. تقريب التابع بكثير حدود يسمى منشور تابع عند جوار لهذه النقطة.

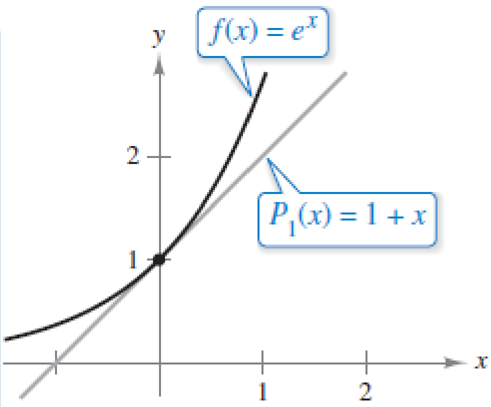


بالطبع هناك الكثير من كثيرات الحدود التي خطوطها البيانية تمر من النقطة $(c,f(c))$، مهمتنا هنا هي إيجاد كثير حدود خطه البياني يكون في جوار هذه النقطة يشبه الخط البياني للتابع الذي نريد تقريبه.

إحدى الطرق لإيجاد كثير الحدود المطلوب هي أن نفرض شرطاً جديداً وهو أن يكون للخط البياني لـ f والخط البياني لكثير الحدود نفس الميل عند النقطة $(c,f(c))$، أي $P'(c)=f'(c)$.

مثال 30: التقريب بكثير حدود من الدرجة الأولى First-Degree Polynomial Approximation

من أجل التابع $f(x)=e^x$، أوجد كثير حدود من الدرجة الأولى $P_1(x)=a_0+a_1x$ بحيث تكون قيمته وميله متفقتان مع قيمة وميل التابع f عند $x=0$.



الحل:

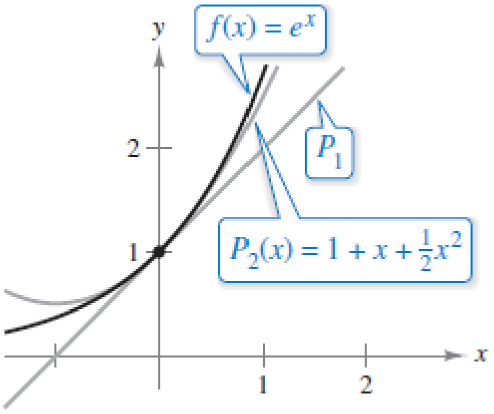
بما أن $f(x)=f'(x)=e^x$، بالتالي $f(0)=f'(0)=1$. بما أن $P_1(x)=a_0+a_1x$. ومن $P_1(0)=f(0)$ نستنتج أن $a_0=1$. وبما أن $P_1'(x)=a_1$، ومن نستنتج أن $a_1=1$ وبالتالي فإن $P_1(x)=1+x$.

يمكن تحسين التقريب السابق بأن نفرض شرطاً جديداً وهذا الشرط هو أن تكون قيمة المشتق الثاني لكثير الحدود P والتابع f متساويان عند القيمة $x=0$.

عندئذ نحصل على كثير حدود من الدرجة الثانية يحقق الشروط التالية:

$$P_2(0)=f(0), \quad P_2'(0)=f'(0), \quad P_2''(0)=f''(0)$$

كثير الحدود هو التالي: $P_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$



في الشكل المجاور نلاحظ أن P_2 هو تقريب أفضل لـ f من P_1.

إذا استمرينا بهذا الأسلوب لتحسين التقريب حتى يصبح كثير حدود من الدرجة n سيتطلب أن تكون قيمة P_n ومشتقاته الـ n الأولى مساويةً لقيمة $f(x)=e^x$ ومشتقاته الـn الأولى عند $x=0$ وسنجد عندها أن:

$$p_n(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n\approx e^x$$

كثيرات حدود تايلوروماكلورين Taylor and Maclaurin Polynomials

تعريف كثير حدود تايلوروماكلورين Definitions of Taylor & Maclaurin Polynomial

إذا كان f يقبل n مشتقاً عند c، عندها كثير الحدود:

$$P_n(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

يدعى بكثير حدود تايلور من الدرجة n للتابع f عند c. وإذا كانت $c=0$ عندها يكون:

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

يدعى بكثير حدود ماكلورين من الدرجة n للتابع f.

مثال 31: أوجد كثير حدود ماكلورين من الدرجة n للتابع $f(x)=e^x$.

الحل:

إن كثير حدود ماكلورين للتابع $f(x)=e^x$ هو:

$$P_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

مثال 32: أوجد كثيرات حدود تايلور P_0, P_1, P_2 and P_3 للتابع $f(x)=\ln x$ في جوار النقطة $c=1$.

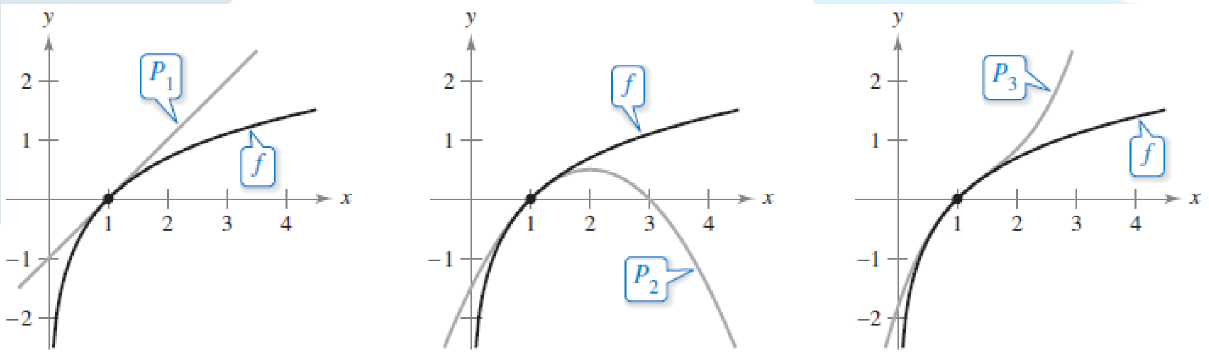
الحل:

بالنشر في جوار $c=1$ ينتج لدينا:

$$f(x)=\ln x \qquad f(1)=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x} \qquad f'(1)=1$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \qquad f''(x)=-1$$
$$f'''(x)=\frac{2!}{x^3} \qquad f'''(x)=2$$

وبالتالي كثيرات حدود تايلور المطلوبة هي:

$$P_0(x)=f(1)=0$$
$$P_1(x)=f(1)+f'(1)(x-1)=(x-1)$$
$$P_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$$
$$P_3(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$
$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$



من الملاحظ أنه في جوار $c=1$ المنحنيان لا يمكن تمييزهما عن بعضهما البعض. على سبيل المثال:

$$P_3(1.1)\approx 0.09533333, \quad \ln(1.1)\approx 0.09531018$$

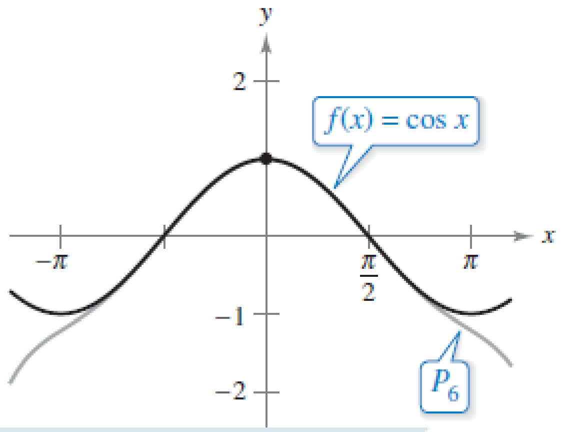
مثال 33: أوجد كثيرات حدود ماكلورين P_0, P_2, P_4 and P_6 للتابع $f(x)=\cos x$. استخدم $P_6(x)$ لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\cos(0.1)$.

الحل:

بالنشر في جوار $c=0$ ينتج لدينا:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos x & f(0)=1 \\ f'(x)=-\sin x & f'(0)=0 \\ f''(x)=-\cos x & f''(0)=-1 \\ f'''(x)=\sin x & f'''(0)=0 \end{array}$$

بتكرار الاشتقاق، نلاحظ أن النموذج $1 , 0 , -1 , 0$ يتكرر باستمرار. كثيرات حدود ماكلورين المطلوبة هي:



$$P_0(x)=1, \quad P_2(x)=1-\frac{1}{2!}x^2,$$

$$P_4(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4,$$

$$P_6(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6$$

باستخدام $P_6(x)$ نلاحظ أن القيمة التقريبية لـ $\cos(0.1)$ هي:

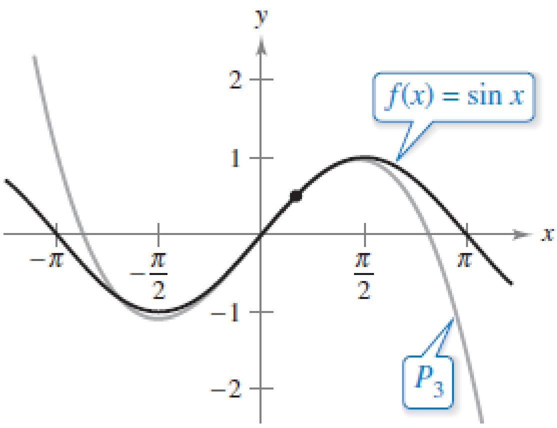
$\cos(0.1)=0.995004165$.

ملاحظة: كثير حدود ماكلورين للتابع $\cos x$ يحوي فقط القِوى الزوجية لـ x. وبشكل مشابه فإن كثير حدود ماكلورين للتابع $\sin x$ يحوي فقط القوى الفردية لـ x. لكن هذا ليس صحيحاً دائماً إذا ما تم إيجاد كثير الحدود في جوار مغاير لـ $c=0$ كما سنجد في المثال التالي.

مثال 34: أوجد كثير حدود تايلور من الدرجة الثالثة للتابع $f(x)=\sin x$ في جوار النقطة $c=\frac{\pi}{6}$.

الحل:

بالنشر في جوار $\frac{\pi}{6}$ ينتج ما يلي:



$$f(x)=\sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا فإن كثير حدود تايلور من المرتبة الثالثة للتابع $f(x)=\sin x$ في جوار $c=\frac{\pi}{6}$ هو:

$$P_3(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2(2!)}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2(3!)}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3$$

مثال 35: استخدم كثير حدود ماكلورين من الدرجة الرابعة لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\ln(1.1)$.

الحل:

بما أن القيمة 1.1 أقرب إلى 1 منها إلى الـ 0، بالتالي يجب أن نأخذ كثير حدود ماكلورين للتابع $g(x)=\ln(1+x)$.

$$g(x)=\ln(1+x) \qquad g(0)=0$$

$$g'(x)=(1+x)^{-1} \qquad g'(0)=-1$$

$$g''(x)=-(1+x)^{-2} \qquad g''(0)=-1$$

$$g'''(x)=2(1+x)^{-3} \qquad g'''(0)=2$$

$$g^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4} \qquad g^{(4)}(0)=-6$$

كثير حدود ماكلورين من الدرجة الرابعة للتابع $g(x)=\ln(1+x)$ هو:

$$P_4(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$$

بناءً على ذلك نستنتج: $\ln(1.1) = \ln(1+0.1) \approx P_4(0.1) \approx 0.0953083$.

يبين الجدول التالي دقة التقريب لكثير حدود تايلور بدلالة n:

n	1	2	3	4
$P_n(0.1)$	0.1000000	0.0950000	0.0953333	0.0953083

نلاحظ أنه كلما كانت n أكبر، فإن التقريب $P_n(0.1)$ يقترب أكثر من القيمة المحسوبة بالآلة الحاسبة وهي $\ln(1.1) = 0.0953102$.

من جهة أخرى يبين الجدول التالي أدناه أنه كلما ابتعدنا عن القيمة التي ننشر حولها التابع $c = 1$ فإن دقة التقريب تتناقص.

x	0	0.1	0.5	0.75	1.0
$\ln(1+x)$	0	0.0953102	0.4054651	0.5596158	0.6931472
$P_4(x)$	0	0.0953083	0.4010417	0.5302734	0.5833333

من الجدولين السابقين نستنتج أن:

1. التقريب عادةً يكون أفضل عند قيم x الأقرب إلى c من قيم x الأبعد عن c.
2. التقريب عادةً يكون أفضل كلما زادت درجة كثير حدود تايلور(أو ماكلورين)

باقي كثيرات حدود تايلور Remainder of a Taylor Polynomial

لحساب دقة التقريب لقيمة التابع $f(x)$ بكثير حدود تايلور $P_n(x)$ يمكن أن نستخدم مفهوم الباقي remainder $R_n(x)$ والمعرف كما يلي:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Exact value}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Approximate value}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Remainder}}$$

لذلك فإن:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

القيمة المطلقة للباقي تدعى بالخطأ المرتكب من عملية التقريب:

$$\text{Error}=|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|$$

مبرهنة 18: مبرهنة تايلور Taylor's Theorem

إذا كان التابع f قابل للاشتقاق $n+1$ مرّة على مجال I تنتمي إليه c، عندها يكون من أجل كل x من I يوجد z بين x و c بحيث يكون:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_n(x)$$

حيث: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

إحدى النتائج الهامة لمبرهنة تايلور هي:

$$|R_n(x)|\le\frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}\max\left|f^{(n+1)}(z)\right|$$

حيث: $\max\left|f^{(n+1)}(z)\right|$ هي قيمة $f^{(n+1)}(z)$ بين x و c.

مثال 36: كثير حدود ماكلورين من الدرجة الثالثة للتابع $\sin x$ مُعطى بالعلاقة: $f_3(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}$. استخدم مبرهنة تايلور لتقريب القيمة $\sin(0.1)$ بـ $p_3(0.1)$ وحدد دقة التقريب.

الحل:

باستخدام مبرهنة تايلور لدينا :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+R_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{f^4(z)}{4!}x^4$$

حيث $0<z<0.1$ وبالتالي:

$$\sin(0.1)\approx 0.1-\frac{(0.1)^3}{3!}\approx 0.1-0.000167=0.09983$$

بما أنّ $f^{(4)}(z)=\sin z$ ينتج أنّ الخطأ $|R_3(0.1)|$ يمكن أن نحدّه كما يلي:

$$0<R_3(0.1)=\frac{\sin z}{4!}(0.1)^4<\frac{0.0001}{4!}\approx 0.00004$$

وهذا يعني :

$$0.099833<\sin(0.1)=0.099833+R_3(x)<0.099833+0.00004$$
$$\Rightarrow\ 0.099833<\sin(0.1)<0.099837$$

7. سلاسل القوى Power Series

درسنا في المحاضرة السابقة مفهوم تقريب التوابع بكثيرات حدود تايلور، على سبيل المثال التابع $f(x)=e^x$ يمكن تقريبه بكثير حدود ماكلورين الموافق له كما يلي:

تقريب بكثير حدود من الدرجة الأولى : $e^x\approx 1+x$

تقريب بكثير حدود من الدرجة الثانية : $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}$

تقريب بكثير حدود من الدرجة الثالثة: $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

وجدنا سابقاً أنه كلما زادت درجة كثير الحدود كلما زادت دقة التقريب وفي هذه المحاضرة سنجد أن العديد من التوابع الهامة (من ضمنها $f(x)=e^x$) يمكن أن يُعبر عنها بالضبط (قيمتها الدقيقة) بواسطة سلسلة لانهائية تدعى بسلسلة القوى، على سبيل المثال، سلسلة القوى المعبرة عن التابع e^x هي:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

تعريف سلاسل القوى Definition of Power Series

ليكن x متحولاً ما، عندها السلسلة اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ تدعى بـ سلسلة قوى، وبشكل أعم، السلسلة اللانهائية من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n+\cdots$$

تُدعى بسلسلة القوى في جوار c حيث c عدد ثابت.

مثال 37:

a) سلسلة القوى التالية متمركزة حول الـ 0

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$$

b) سلسلة القوى التالية متمركزة حول الـ 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(x+1)^{n}=1-x+1)+x+1)^{2}-x+1)^{3}+\cdots$$

c) سلسلة القوى التالية متمركزة حول الـ 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(x+1)^{n}=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^{2}+\frac{1}{3}(x-1)^{3}+\cdots$$

نصف قطرومجال التقارب Radius Interval of Convergence

إن سلسلة القوى يمكن رؤيتها كتابع لـ x : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x-c)^{n}$ ، حيث مجال تعريف f هو مجموعة قيم x التي تجعل السلسلة متقاربة.

بالطبع كل سلسلة قوى تكون متقاربة من أجل c والسبب هو:

$$f(c)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(c-c)^{n}=a_{0}(1)+0+0+0+......+0+\cdots=a_{0}$$

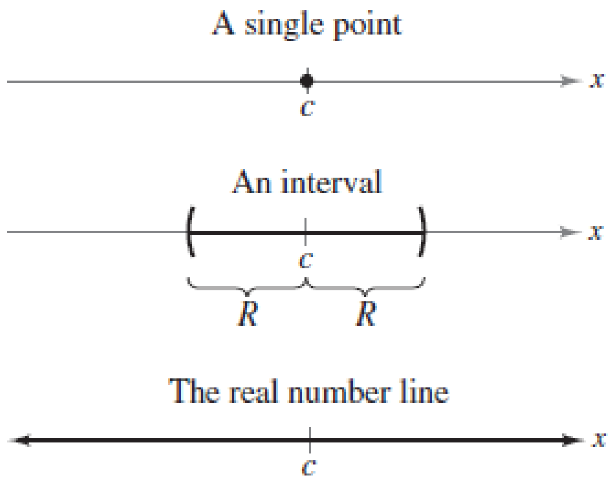
من أجل هذا السبب فإن c تقع دائماً ضمن مجال التعريف.

مبرهنة 19: تقارب سلسلة القوى Convergence of Power Series

من أجل سلسلة قوى متمركزة حول c لدينا إحدى الحالات التالية:

1. السلسلة متقاربة فقط عند c .
2. يوجد عدد حقيقي $R>0$ بحيث تكون السلسلة متقاربة بالإطلاق من أجل القيم x التي تحقق $|x-c|<R$ ومتباعدة من أجل قيم x التي تحقق $|x-c|>R$.

3. السلسلة متقاربة بالإطلاق من جميع قيم x.



نسمي العدد R نصف قطر التقارب Radius of Convergence لسلسلة القوى. إذا كانت السلسلة متقاربة فقط من أجل c فإن نصف قطر التقارب هو $R = 0$، وإذا كانت السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x فإن نصف قطر التقارب هو $R = \infty$.

تُسمى مجموعة قيم x التي من أجلها تكون السلسلة متقاربة مجال التقارب لسلسلة القوى Interval of Convergence.

ملاحظة: لتحديد نصف قطر التقارب لسلسلة قوى، نستخدم اختبار النسبة.

مثال 38: أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

الحل:

من أجل $x = 0$ نلاحظ أن:

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,0^n = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

من أجل أي قيمة معينة لـ x بحيث $|x| > 0$، ليكن $u_n = n!x^n$ عندها:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

وبالتالي حسب معيار النسبة فإن السلسلة متباعدة من أجل $|x| > 0$ ومتقاربة فقط من أجل المركز 0. بالتالي نصف قطر التقارب هو $R = 0$.

مثال 39 : أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n$

الحل:

من أجل $x \neq 2$، ليكن $u_n = 3(x-2)^n$ عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{3(x-2)^{n+1}}{3(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x-2|=|x-2|$$

وبحسب معيار النسبة، السلسلة متقاربة إذا كانت $|x-2|<1$ ومتباعدة إذا كانت $|x-2|>1$. وبالتالي نصف قطر تقارب السلسلة هو $R=1$.

مثال 40: أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

الحل:

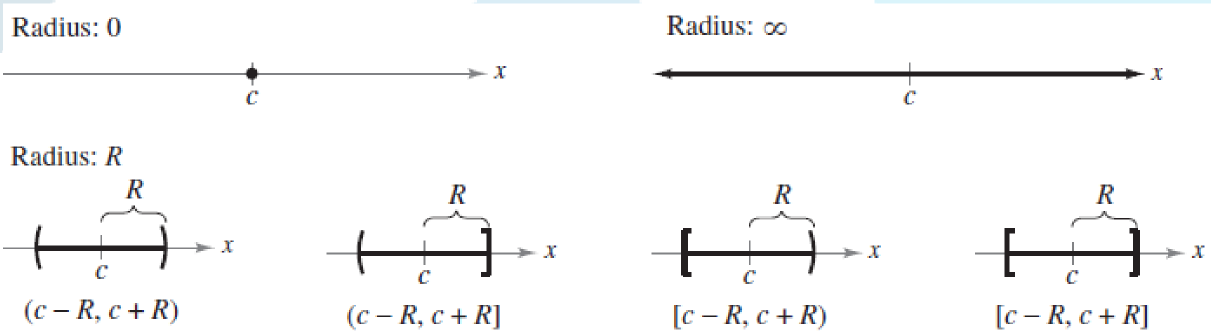
ليكن $u_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$، عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+3)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}=0$$

إذاً وبحسب معيار النسبة تكون السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x وبالتالي يكون نصف قطر التقارب هو $R=\infty$.

التقارب عند الحدود Endpoint Convergence

المبرهنة السابقة، في الحالة التي يكون فيها نصف قطر التقارب هو عدد منتهٍ R، لا تعطينا أي نتيجة عن التقارب عند أطراف المجال، أي أنه لا يمكننا الحكم فيما إذا كانت السلسلة متقاربة من أجل حدود مجال التقارب أم لا. لذلك يجب أن يتم الاختبار من أجل كل حد من حدود المجال لمعرفة فيما اذا كانت السلسلة متقاربة أم لا. وكنتيجة لذلك فإنّ مجال التقارب لسلسلة القوى يمكن أن يأخذ حدى الأشكال الستة التالية.



مثال 41: أوجد أوجد مجال التقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

الحل:

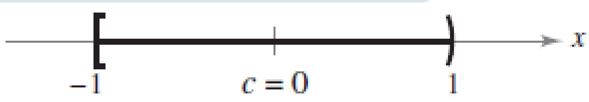
ليكن $u_n = \frac{x^n}{n}$، بالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n\,x}{n+1} \right| = |x|$$

لذلك وبحسب معيار النسبة، فإن نصف قطر التقارب هو $R = 1$. والسلسلة متقاربة على المجال $(-1,1)$. لنرى في ما إذا كانت السلسلة متقاربة عند أحد أطراف المجال أو كليهما.

عند $x = 1$ نحصل على سلسلة توافقية متباعدة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$. إذاً سلسلة القوى المفروضة متباعدة من أجل $x = 1$.

عند $x = -1$ نحصل على سلسلة توافقية متناوبة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$. إذاً سلسلة القوى المفروضة متقاربة من أجل $x = -1$. مما سبق نستنتج أن مجال تقارب السلسلة هو $[-1,1)$



مثال 41: أوجد أوجد مجال التقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$

الحل:

ليكن $u_n = \frac{(-1)^n (x+1)^n}{2^n}$، بالتالي:

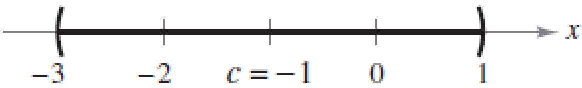
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(x+1)}{2^{n+1}}\right| = \left|\frac{x+1}{2}\right|$$

بحسب معيار النسبة، السلسلة متقاربة اذا كان $|x+1| < 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{(x+1)}{2}\right| < 1$

اذاً نصف قطر التقارب هو $R = 2$. والسلسلة متقاربة على المجال $(-3,1)$. لنرى في ما إذا كانت السلسلة متقاربة عند أحد أطراف المجال أو كليهما.

عند $x = -3$: $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n}$

عند $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2)^n}{2^n}$



وكلاهما متباعد. بالتالي يكون مجال التقارب للسلسلة المعطاة هو $(-3,1)$.

مثال 42: أوجد مجال التقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

الحل:

ليكن $u_n = \frac{x^n}{2^n}$، بالتالي:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2 x}{(n+1)^2}\right| = |x|$$

نصف قطر التقارب هو $R = 1$. والسلسلة متقاربة على المجال $(-1,1)$. لنفحص الآن التقارب عند الأطراف.

عند $x = 1$ نحصل على سلسلة ريمان (P-series) متقاربة: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$.

عند $x=-1$ نحصل على سلسلة متناوبة متقاربة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots$

وبالتالي يكون مجال تقارب السلسلة هو $[-1,1]$.

اشتقاق وتكامل سلاسل القوى Differentiation and Integration of Power Series

مبرهنة 20: خصائص التوابع المعينة بسلاسل القوى Properties of Functions Defined by P. S.

إذا كان التابع المعرف كما يلي:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$

له نصف قطر تقارب $R>0$ عندها يكون التابع f قابل للاشتقاق (وبالتالي مستمر) على المجال $(c-R,c+R)$، بالاضافة إلى ذلك، فإن مشتق f وتابعه الأصلي معرفان كما يلي:

$$1.\ f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,a_n(x-c)^{n-1}=a_1+2a_2(x-c)+3a_3(x-c)^2+\cdots$$

$$2.\ \int f(x)dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}=C+a_0(x-c)+a_1\frac{(x-c)^2}{2}+\cdots$$

نصف قطر التقارب للسلسلة التي تم الحصول عليها بالاشتقاق أو التكامل هو نفسه نصف قطر التقارب للسلسلة الأصلية، لكن مجال التقارب يمكن أن يختلف وذلك تبعاً لسلوك التابع عند الأطراف (حدود المجال).

مثال 43: ليكن التابع المعطى كما يلي $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$. أوجد مجال التقارب لكل مما يلي:

$$a)\int f(x)dx,\quad b)f(x),\quad c)f'(x)$$

الحل:

$$1.\ f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$2.\ \int f(x)dx=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=C+\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{x^4}{3\times 4}+\cdots$$

بالاعتماد على معيار النسبة، نجد أنّ كل من السلسلتين السابقتين لهما نصف قطر تقارب هو $R=1$، بالتالي متقاربتين على المجال $(-1,1)$ ويكون لدينا ما يلي:

a) من أجل $\int f(x)dx$ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ متقاربة من أجل $x=\pm1$، وبالتالي يكون مجال التقارب لهذه السلسلة هو $[-1,1]$.

b) من أجل $f(x)$، السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$ متباعدة من أجل $x=1$ و متقاربة من أجل $x=-1$، وبالتالي يكون مجال التقارب بهذه السلسلة هو $[-1,1)$.

c) من أجل $f'(x)$، السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ متباعدة من أجل $x=\pm1$، وبالتالي يكون مجال التقارب لهذه السلسلة هو $(-1,1)$.

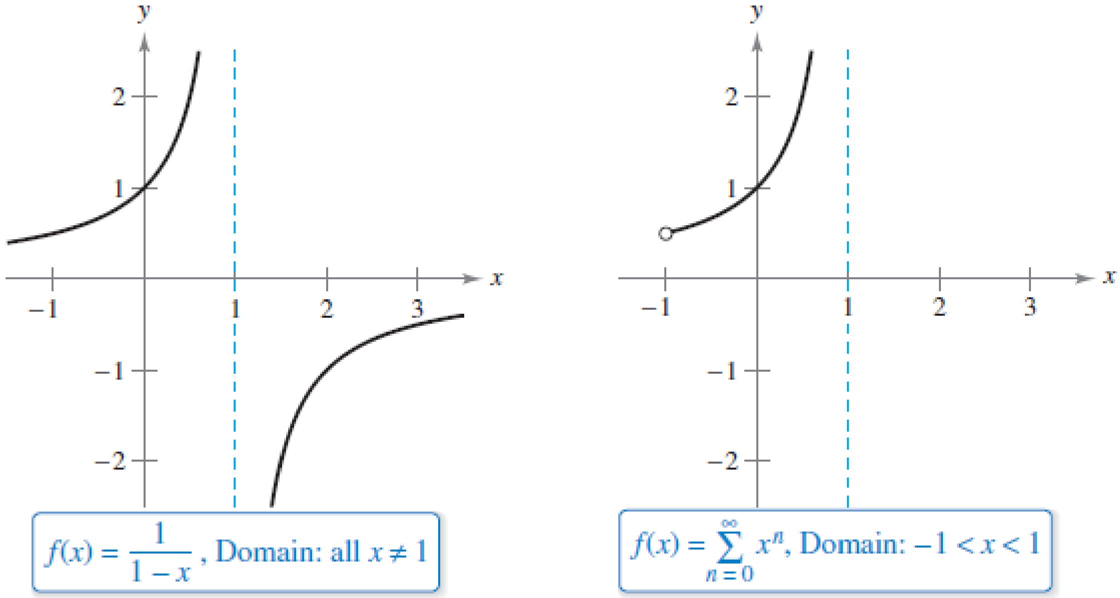
8. تمثيل التوابع بسلاسل قوى Representation of Functions by Power Series

سلاسل القوى الهندسية Geometric Power Series

لنأخذ التابع: $f(x)=\frac{1}{1-x}$. إن f يشبه مجموع سلسلة هندسية $|r|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n}=\frac{a}{1-r}$. وبمعنى آخر، إذا وضعنا $a=1$ و $r=x$ فإن سلسلة القوى الممثلة للتابع $\frac{1}{1-x}$ والمتمركزة حول الـ 0 هي:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots,\quad |x|<1$$

بالطبع هذه السلسلة تمثل التابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ على المجال $(-1,1)$ فقط، بينما f معرف من أجل جميع القيم $x\neq1$ (كما يوضحه الشكل أدناه):



مثال 44: أوجد سلسلة القوى للتابع $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ والمتمركزة حول 0

الحل:

نكتب $f(x)$ بالشكل $\dfrac{a}{1-r}$

$$\frac{4}{2+x} = \frac{2}{1-\left(\dfrac{-x}{2}\right)} = \frac{a}{1-r}$$

حيث $r = \dfrac{-x}{2}$ و $a = 2$ ، لذلك فإن سلسلة القوى لـ $f(x)$ هي:

$$\frac{4}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)^n = 2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots\right)$$

وهي متقاربة عندما $\left|-\dfrac{x}{2}\right| < 1$ وهذا يقودنا إلى أنّ مجال التقارب هو $(-2,2)$.

مثال 45: أوجد سلسلة قوى متمركزة حول الـ 1 للتابع $f(x) = \dfrac{1}{x}$

الحل:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1-(-x+1)}=\frac{a}{1-r}=\sum_{n=0}^{\infty} a r^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}[-(x-1)]^{n}$$

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(x-1)^{n}=1-(x-1)+(x-1)^{2}-(x-1)^{3}+\cdots$$

والسلسلة متقاربة عندما $|x-1|<1$ وهذا يقودنا إلى أنّ مجال التقارب هو $(0,2)$.

العمليات على سلاسل القوى Operations with Power Series

ليكن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n} x^{n}$ و $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{n} x^{n}$ ، يكون:

1. $f(kx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n} k^{n} x^{n}$

2. $f(x^{N})=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n} x^{nN}$

3. $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n}\pm b_{n}) x^{n}$

العمليات السابقة يمكن أن تغير من مجال التقارب للسلسلة الناتجة. في المثال التالي مجال التقارب للسلسلة الناتجة (مجموع سلسلتين) هو تقاطع مجالي التقارب لهاتين السلسلتين.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n}}_{(-1,1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}}_{(-2,2)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n}}\right) x^{n}}_{(-1,1)}$$

$$(-1,1) \quad \cap \quad (-2,2) \quad = \quad (-1,1)$$

مثال 46: أوجد سلسلة القوى المتمركزة حول 0 للتابع $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^{2}-1}$

الحل:

باستخدام تفريق الكسور نكتب f بالشكل :

$$f(x)=\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}$$

نوجد سلسلة القوى الموافقة لكل كسر:

$$\frac{2}{x+1}=\frac{2}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^n, \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1$$

فنحصل على سلسلة القوى التالية والمعبرة عن التابع f :

$$\frac{3x-1}{x^2-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^n-1\right]x^n=1-3x-x^2-3x^3+x^4-\cdots$$

ومجال التقارب لهذه السلسلة هو $(-1,1)$

مثال 47: أوجد سلسلة القوى للتابع $f(x)=\ln x$ والمتمركزة حول القيمة 1.

الحل:

وجدنا سابقاً أنّ $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ ، وأن مجال التقارب هو $(0,2)$. بإجراء مُكاملة على طرفي العلاقة السابقة نحصل على:

$$\ln x=\int\frac{1}{x}\,dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

بجعل $x=1$ نستنتج أنّ $C=0$، بالتالي:

$$\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{(x-1)}{1}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots$$

مجال تقارب هذه السلسلة هو $(0,2]$.

9. سلاسل تايلوروماكلورين Taylor and Maclaurin Series

مبرهنة 21: الشكل العام لسلسلة قوى متقاربة The Form of a Convergent Power Series

إذا كان f تابعاً مُمَثَّلاً بسلسلة قوى $f(x)=\sum a_n(x-c)^n$. من أجل جميع القيم x على مجال مفتوح I يحوي c يكون $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$، وأيضاً:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

تعريف سلسلة تايلوروماكلورين Definition of Taylor and Maclaurin Series

إذا كان التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات عند $x=c$ عندها فإنّ السلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(c)+f'(c)(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

تُدعى بسلسلة تايلور للتابع $f(x)$ عند c. وإذا كانت $c=0$ عندئذٍ تُسمى بسلسلة ماكلورين للتابع f.

مثال 48: استخدم التابع $f(x)=\sin x$ لتشكيل سلسلة ماكلورين.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+.....$$

وحدد مجال التقارب.

الحل:

بالاشتقاق المتتالي للتابع $f(x)=\sin x$ نحصل على:

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sin x & f(0)=0 \\ f'(x)=\cos x & f'(0)=1 \\ f''(x)=-\sin x & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\cos x & f'''(0)=-1 \end{array}$$

بتكرار الاشتقاق، نلاحظ أن النموذج $0, 1, 0, -1$ يتكرر باستمرار. سلسلة ماكلورين المطلوبة هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=0+(1)x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6+\cdots$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

باستخدام معيار النسبة نستطيع استنتاج أن هذه السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x.

وجدنا سابقاً أنه: إذا كان التابع f قابل للاشتقاق $n+1$ مرّة على مجال مفتوح / مركزه c، يكون من أجل كل x من / يوجد z بين x و c بحيث يكون:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_n(x)$$

حيث: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$.

مبرهنة 22: تقارب سلسلة تايلور Convergence of Taylor Series

اذا كانت $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ من أجل جميع قيم x من المجال / عندئذٍ تكون سلسلة تايلور للتابع f متقاربة وتساوي $f(x)$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

مثال 48: بين أن سلسلة ماكلورين للتابع $f(x)=\sin x$ متقاربة من القيمة $\sin x$ وذلك من أجل أي قيمة لـ x.

الحل:

نحن بحاجة إلى اثبات أنّ:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

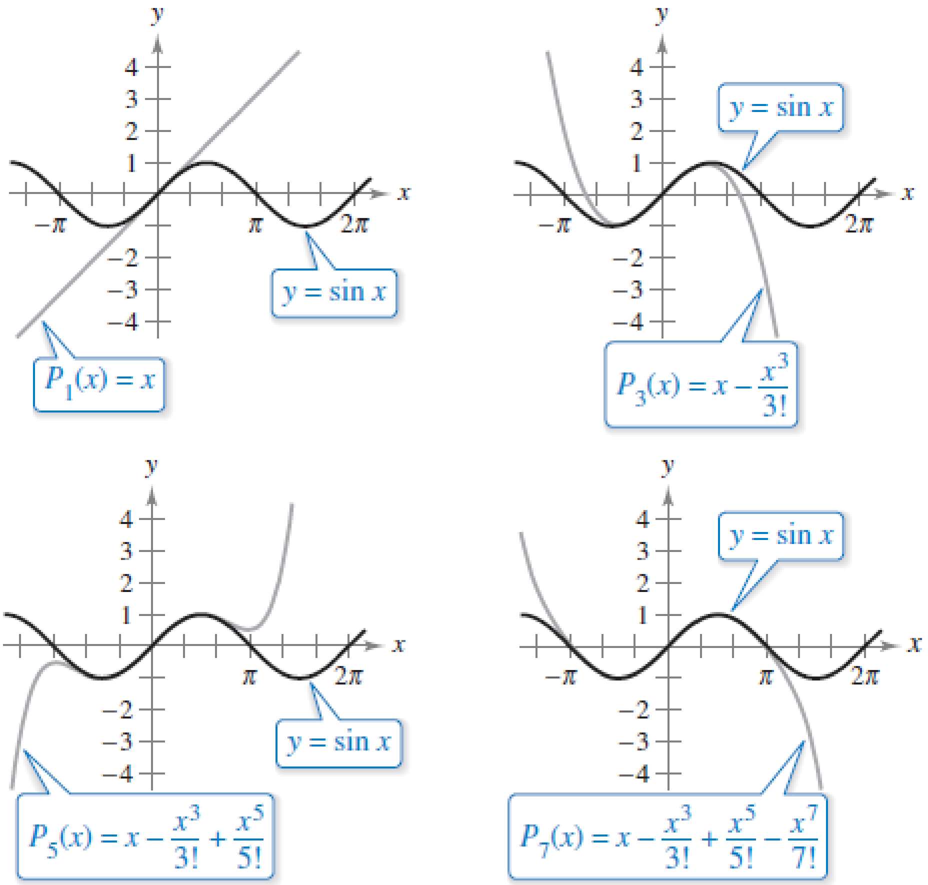
صحيحة من أجل جميع قيم x.

بما أنّ $f^{(n+1)}(x)=\pm\sin x$ أو $f^{(2n+1)}(x)=\pm\cos x$ وأنّ $\left|f^{(n+1)}(z)\right|\le 1$ من أجل أي عدد حقيقي z، وبالتالي من أجل أي قيمة ثابتة x يمكن أن نطبق مبرهنة تايلور لنستنتج أنّ:

$$0 \le |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

أخيراً باستخدام نظرية الإحاطة ينتج أنه من أجل جميع قيم x فإنّ $R_n(x) \to 0$ عندما $n \to \infty$. بالتالي فإن سلسلة ماكلورين للتابع $f(x) = \sin x$ متقاربة من القيمة $\sin x$ من أجل اي قيمة لـ x.

الأشكال التالية توضح تقارب سلسلة ماكلورين لـ $\sin x$.



بمقارنة الخط البياني لكثيرات حدود ماكلورين $P_1(x), P_3(x), P_5(x), P_7(x)$ مع الخط البياني لـ $\sin x$ لاحظ أنه كلما زادت درجة كثير الحدود كلما اقترب الخطان البيانيان لتابع الـ $\sin x$ وكثير الحدود من بعضهما البعض.

مثال 49: أوجد سلسلة ماكلورين للتابع $f(x) = \sin x^2$

الحل:

لإيجاد حدود سلسلة ماكلورين بشكل مباشر،

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

$$f'(x)=2x\cos x^2,\quad f''(x)=-4x^2\sin x^2+2\cos x^2,\cdots$$

نلاحظ أن الاستمرار في هذا الطريق صعب وقد لا يقودنا إلى نتيجة، لذلك سنفكر بطريقة أخرى.

لنأخذ سلسلة ماكلورين للتابع $\sin x$:

$$g(x)=\sin x=x^2-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

وبما أن $\sin x^2=g(x^2)$ يمكن أن نستبدل كل x بـ x^2 في السلسلة السابقة نجد:

$$\sin x^2=g(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots$$

مثال 50: أوجد سلسلة ماكلورين للتابع $f(x)=(1+x)^k$ ثم حدد نصف قطر ومجال التقارب، باعتبار أن k عدد صحيح غير سالب.

نسمي سلسلة القوى للتابع $f(x)=(1+x)^k$ بسلسلة ثنائي الحد Binomial Series.

الحل:

بالاشتقاق المتتالي نحصل على:

$$\begin{aligned}
&f(x)=(1+x)^k && f(0)=1\\
&f'(x)=k(1+x)^{k-1} && f'(0)=k\\
&f''(x)=k(k-1)(1+x)^{k-2} && f''(0)=k(k-1)\\
&f'''(x)=k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} && f'''(0)=k(k-1)(k-2)\\
&\vdots && \vdots\\
&f^{(n)}(x)=k\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} && f^{(n)}(0)=k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

وبالتالي ينتج لدينا السلسلة التالية:

$$1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2}+\cdots+\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)x^n}{n!}+\cdots$$

بما أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ يمكننا تطبيق معيار النسبة لنستنتج أن نصف قطر التقارب هو $R = 1$. وبالتالي السلسلة متقاربة من تابع ما في المجال $(-1,1)$.

مثال 50: أوجد سلسلة القوى للتابع $\sqrt[3]{1+x}$

الحل:

باستخدام سلسلة القوى لثنائي الحد:

$$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!}+\cdots$$

نعوض $k = \frac{1}{3}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{x}{3}-\frac{2x^2}{3^2\ 2!}+\frac{2\times 5x^3}{3^3\ 3!}-\frac{2\times 5\times 8x^4}{3^4\ 4!}+\dots$$

وهي متقاربة من أجل $-1 \le x \le 1$.

مثال 51: أوجد سلسلة القوى للتابع $f(x) = \cos\sqrt{x}$

الحل:

باستخدام سلسلة القوى التالية:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

نستبدل كل x بـ $\sqrt{x}$ نحصل على:

$$\cos\sqrt{x} = 1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\cdots$$

هذه السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم x التي يكون عندها $\cos\sqrt{x}$ معرّفاً. أي أن السلسلة متقاربة من أجل القيم $x \ge 0$.

مثال 52: أوجد سلسلة القوى للتابع $f(x) = \sin^2 x$

الحل:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \cdots$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} + \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \cdots$$

مثال 53: باستخدام سلاسل القوى، قدّر قيمة المقدار $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ وذلك بارتياب لا تتجاوز قيمته 0.01

الحل:

بتعويض $-x^2$ مكان x في سلسلة القوى للتابع e^x نجد ما يلي:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \frac{x^9}{9\times 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

بجمع الحدود الأربعة الأولى نجد:

$$\int_{0}^{1} e^{-x^{2}} dx \approx 0.74$$

وبحسب اختبار السلاسل المتناوبة، فإن الخطأ في الجواب السابق لا تتجاوز قيمته $0.005 \approx \frac{1}{216}$.