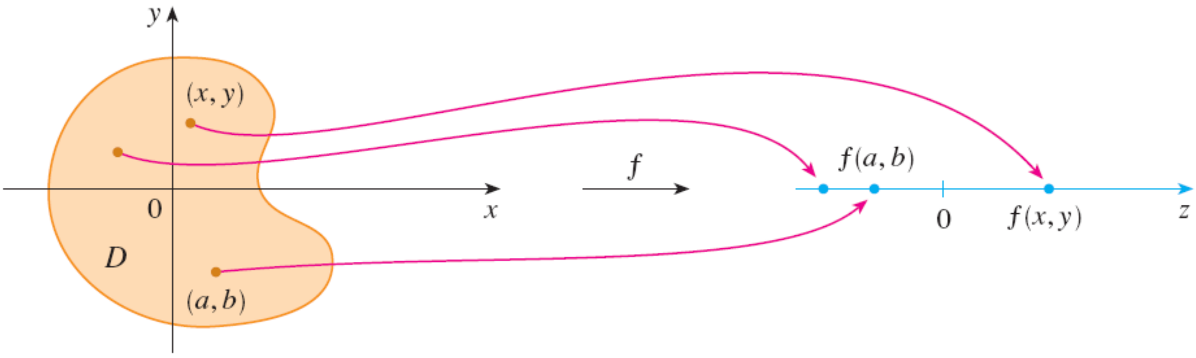
1. مدخل إلى التوابع متعددة المتحولات Introduction to Functions of Several Variables

يوجد العديد من المقادير الشهيرة والتي هي توابع لعدة متحولات. على سبيل المثال العمل $W = FD$ فهو تابع لمتحولين، حجم اسطوانة دائرية $V = \pi r^2 h$ وهو تابع لمتحولين، حجم متوازي مستطيلات $V = lwh$ تابع لثلاث متحولات.

تعريف تابع لمتحولين Definition of a Function of Two Variables

تابع لمتحولين f يربط assigns كل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y) من مجموعة D بعدد حقيقي وحيد $z = f(x, y)$.
نسمي D مجموعة تعريف التابع domain، كما نسمي x, y المتحولات المستقلة independent variables و z المتحول المرتبط dependent variables، وأخيراً نسمي المدى range مجموعة القيم التي يأخذها التابع f، أي $\{f(x, y) \mid (x, y)$ ™ $D\}$.



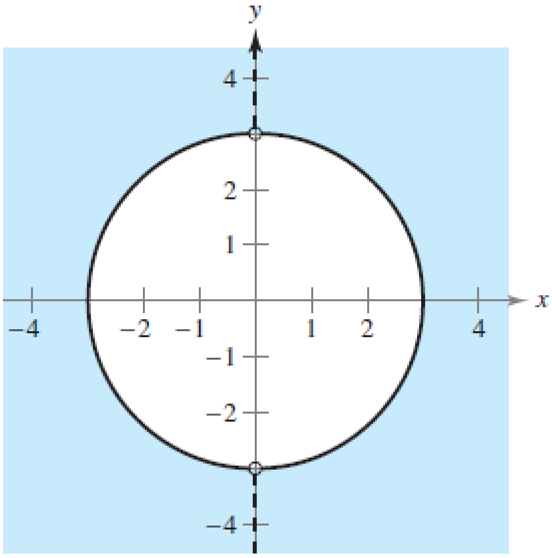
على سبيل المثال مجموعة تعريف التابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ هي كل نقاط المستوي xy، ومجموعة تعريف التابع $f(x, y) = \ln xy$ هي كل نقاط المستوي بحيث xy □ 0 أي الربع الأول.

بنفس الطريقة يمكن تعريف تابع لثلاث متحولات وتكون في هذه الحالة مجموعة التعريف ثلاثيات من الأعداد المرتبة (x, y, z).

مثال 1: أوجد مجموعة تعريف كل من التابعين التاليين $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$ و $g(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

الحل:

التابع $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$ معرف من أجل كل النقاط (x, y)، بحيث $x\neq 0$ و $x^2+y^2\geq 9$. بالتالي مجموعة التعريف هي كافة النقاط التي تقع على وخارج الدائرة $x^2+y^2=9$.



Domain of $f(x, y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

أما التابع

$$g(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$$

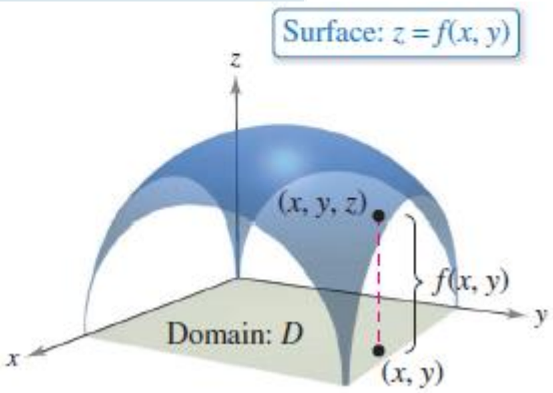
فهو معرف من أجل كافة النقاط (x, y, z)، بحيث $x^2+y^2+z^2<9$. أي أن مجموعة التعريف هي كافة النقاط التي تقع على داخل كرة نصف قطرها 3 ومركزها المبدأ.

كما هو الحال بالنسبة للتوابع لمتحول واحد، يمكن تجميع التوابع متعددة المتحولات. على سبيل المثال، يمكن تشكيل مجموع sum وفرق difference وجداء product وقسمة quotient تابعين لتوابع بمتحولين كما يلي

$$(f\pm g)(x,y)=f(x,y)\pm g(x,y)$$
$$(fg)(x,y)=f(x,y)g(x,y)$$
$$(\frac{f}{g})(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)},\quad g(x,y)\neq 0$$

بيان توابع لمتحولين Graphs of Functions of Two Variables

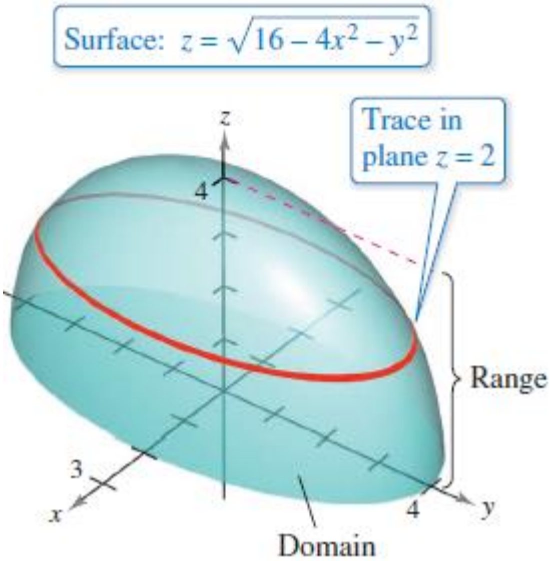
بيان تابع f لمتحولين هو مجموعة النقاط (x, y, z) من الفراغ بحيث $z=f(x, y)$ و (x, y) ضمن مجموعة التعريف ل f. هذا البيان يمكن تفسيره هندسياً كسطح في الفراغ surface in space، حيث أن مسقط هذا السطح على المستوي xy هو D (مجموعة تعريف التابع f)



مثال 2: أوجد مدى التابع $f(x,y)=\sqrt{16-4x^2-y^2}$

الحل:

مجموعة تعريف التابع f هي مجموعة النقاط (x, y) بحيث $16-4x^2-y^2 \geq 0$، بالتالي D عبارة عن النقاط التي تقع على أو داخل القطع الناقص ذو المعادلة $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$.



مدى التابع f هو مجموعة القيم $z=f(x,y)$ بحيث $0 \leq z \leq 4$.

تقع النقطة (x, y, z) على بيان f إذا وفقط إذا

$$z=\sqrt{16-4x^2-y^2}$$

$$z^2=16-4x^2-y^2$$

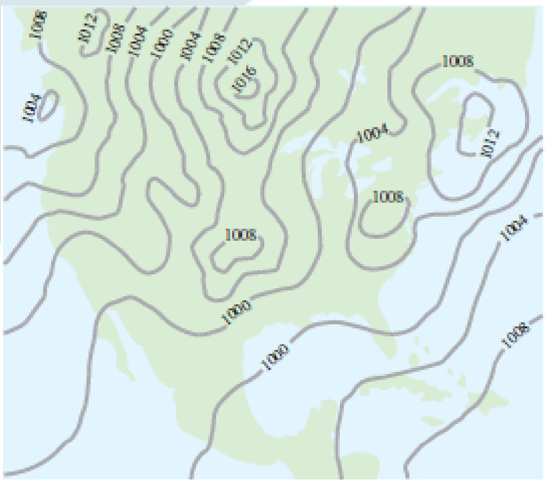
$$4x^2+y^2+z^2=16$$

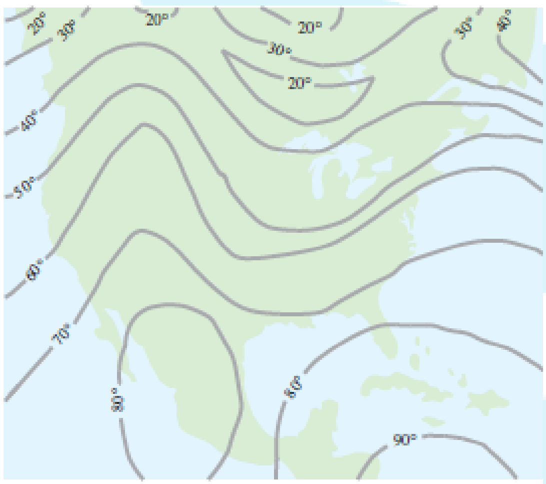
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1, \quad 0 \leq z \leq 4$$

أي أن بيان التابع f هو القسم العلوي من مجسم قطع ناقص، كما هو مبين في الشكل جانباً.

منحنيات التسوية Level Curves

طريقة أخرى لتخيل التوابع بمتحولين هي منحنيات (خطوط) التسوية. منحني التسوية لتابع f بمتحولين هي المنحنيات من الشكل $f(x, y)=k$ حيث k ثابت. على سبيل المثال تبين خارطة الطقس في الشكل التالي منحنيات التسوية الضغط المتساوي isobars (اليسار)، كما أنها تبين المنحنيات للنقاط المتساوية درجات الحرارة isotherms (اليمين).





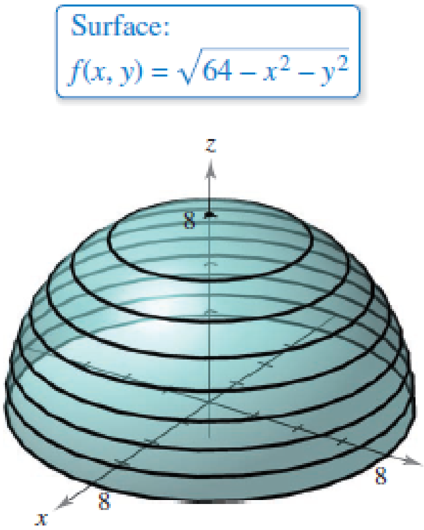
الخرائط الطبوغرافية topographic map عبارة عن خطوط تسوية تُستخدم لإظهار ارتفاع المناطق على سطح الأرض عن مستوى سطح البحر.

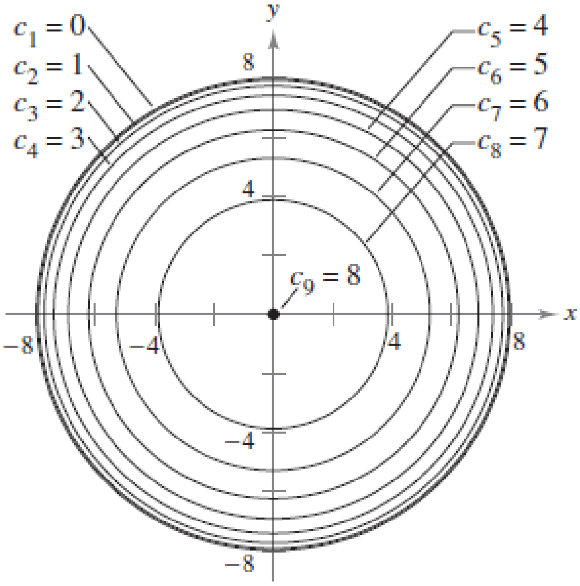
كلما تباعدت خطوط التسوية عن بعضها البعض ضمن الخريطة الطبوغرافية هذا يعني أن z يتغير ببطء، بينما عندما تكون تلك الخطوط متقاربة فهذا يعني أن z يتغير بسرعة.

مثال 3: لتكن القبة الكروية $f(x,y)=\sqrt{64-x^2-y^2}$. ارسم منحنيات التسوية لهذا السطح من أجل $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

الحل:

من أجل كل قيمة ل c فإن $f(x, y) = c$ تمثل معادلة دائرة (أو نقطة) في المستوي xy. على سبيل المثال من أجل $c1 = 0$، منحني التسوية هو $x^2 + y^2 = 64$ (دائرة نصف قطرها 8).

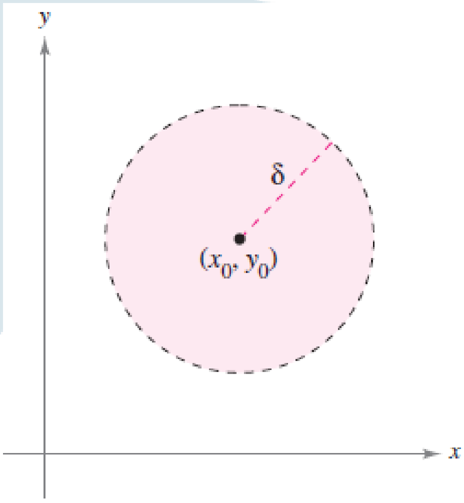


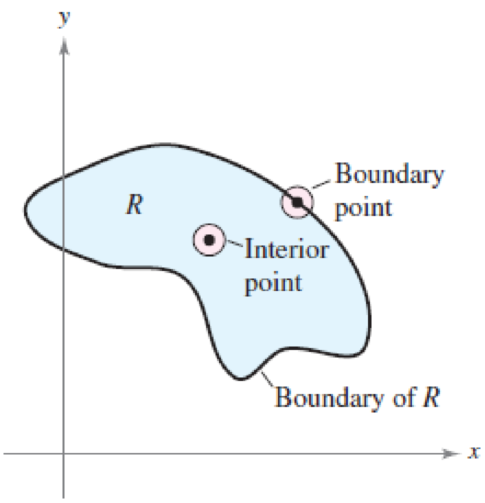


2. النهايات والاستمرارية Limits and Continuity

الجوار في المستوي Neighborhoods in the Plane

نعرف جوار نقطة بالمقدار δ (δ–neighborhood) حول النقطة (x_0, y_0) على أنه القرص المفتوح الذي مركزه (x_0, y_0) ونصف قطره $\delta > 0$، أي $\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$



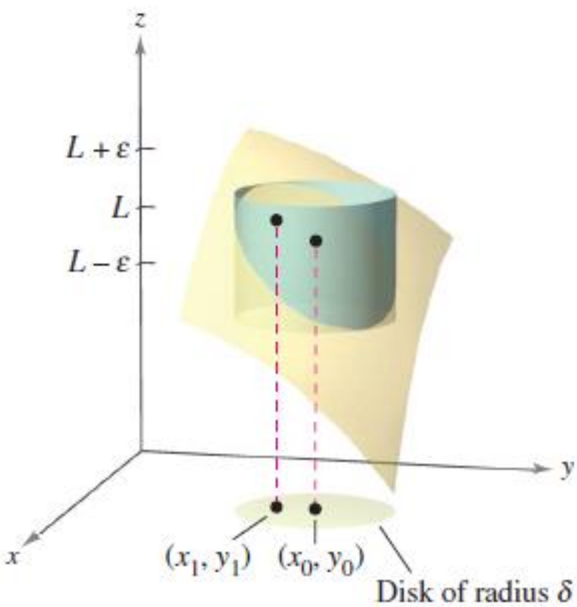


نقول عن نقطة (x_0, y_0) أنها نقطة داخلية interior point في منطقة مستوية R إذا وجد جوار بالمقدار δ حول (x_0, y_0) محتوى بكامله في R. إذا كانت كل نقاط R هي نقاط داخلية، بالتالي R هي منطقة مفتوحة open region. كما نقول عن النقطة (x_0, y_0)

أنها نقطة حدودية (محيطية) boundary point من R إذا كان كل قرص مفتوح مركزه (x_0, y_0) يحوي على نقاط داخل R ونقاط خارج R. أخيراً إذا كانت منطقة تحوي على كافة نقاطها الحدودية نقول عنها منطقة مغلقة closed region.

نهاية تابع بمتحولين Limit of a Function of Two Variables

تعريف نهاية تابع بمتحولين Definition of the Limit of a Function of Two Variables



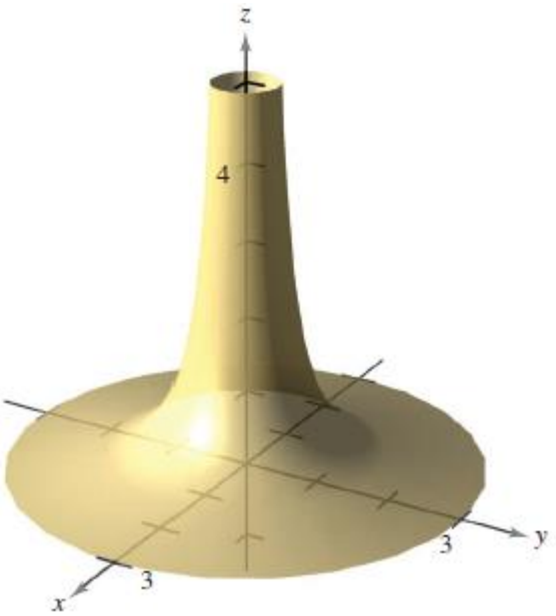
ليكن f تابع لمتحولين معرف، عدا ربما عند (x_0, y_0)، على قرص مفتوح مركزه (x_0, y_0)، وبفرض أن L عدد حقيقي. عندئذ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ إذا كان من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ موافقة لها بحيث $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ لطالما كان $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$.

تعريف النهاية لتابع بمتحولين مشابه لنهاية تابع بمتحول واحد، لكن هناك فرق جوهري. لتحديد فيما إذا كان لتابع بمتحول واحد نهاية، نحتاج فقط إلى اختبار النهاية من اتجاهين يمين ويسار. عندما ينتهي التابع إلى نفس النهاية من اليمين واليسار نستنتج أن النهاية موجودة. أما من أجل تابع لمتحولين فإن العبارة $(x,y) \to (x_0,y_0)$ تعني أن النقطة (x,y) يمكنها أن تسعى إلى (x_0,y_0) من أي اتجاه كان. فإذا كانت النهاية $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ليست نفسها من أجل كل المسارات paths إلى (x_0,y_0)، بالتالي النهاية غير موجودة.

مثال 4: احسب $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$.

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{5(1^2)(2)}{1^2+2^2} = \frac{10}{5} = 2$$



من أجل بعض التوابع من السهل معرفة أن النهاية غير موجودة. على سبيل المثال،

من البديهي أن النهاية التالية غير موجودة $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ لأن قيم $f(x,y)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب (x,y) من $(0,0)$.

من أجل توابع أخرى ليس من السهل معرفة فيما إذا كانت النهاية غير موجودة.

مثال 4: بين أن النهاية التالية غير موجودة $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$.

الحل:

مجموعة تعريف التابع هي كل نقاط المستوي باستثناء النقطة $(0,0)$.

لتبيان أن النهاية غير موجودة عندما تسعى (x,y) إلى $(0,0)$، لنعتبر المسارين التاليين: المسار الأول عبر المحور x-axis، أي من الشكل $(x,0)$، والنهاية عبر هذا المسار تساوي $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\right)^2=1$. المسار الثاني وفق المستقيم $(y=x)$، أي من الشكل (x,x)، والنهاية عبر هذا المسار تساوي $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2=0$.

بما أن النهايتين مختلفتين، بالتالي النهاية غير موجودة.

مثال 5: أوجد النهاية التالية $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

الحل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$$

استمرارية تابع بمتحولين Continuity of a Function of Two Variables

تعريف استمرارية تابع بمتحولين Definition of Continuity of a Function of Two Variables

يكون f تابع لمتحولين مستمر عند نقطة (x_0, y_0) من قرص مفتوح R إذا كان $f(x_0,y_0)$ مساوياً لنهاية $f(x,y)$ عندما تسعى (x,y) إلى (x_0,y_0)، أي $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$. يكون التابع f مستمر على قرص مفتوح R إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط R.

على سبيل المثال التابع $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ غير مستمر عند النقطة $(0,0)$ لأن النهاية غير موجودة لهذا التابع عند النقطة المذكورة.

مبرهنة 1: استمرارية تابع بمتحولين Continuity of a Function of Two Variables

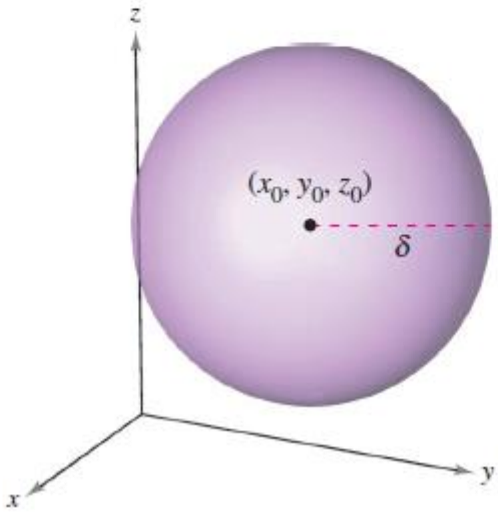
ليكن k عددا حقيقياً و ليكن f و g تابعان مستمران عند النقطة (x_0,y_0)، بالتالي التوابع التالية مستمرة أيضاً عند (x_0,y_0).

1. الضرب بعدد: kf
2. المجموع أو الفرق: $f \pm g$
3. الجداء: fg
4. القسمة: f/g، حيث $g(x_0,y_0)\neq 0$

مثال 6: التابع $f(x,y)=\frac{x-2y}{x^2+y^2}$ مستمر على مجموعة تعريفه، أي أنه مستمر على كافة نقاط المستوي عدا $(0,0)$. والتابع $g(x,y)=\frac{2}{y-x^2}$ مستمر أيضاً على مجموعة تعريفه، أي أنه مستمر على كافة نقاط المستوي عدا مجموعة النقاط التي تحقق العلاقة $y-x^2=0$ (القطع المكافئ $y=x^2$)

استمرارية تابع بثلاث متحولات Continuity of a Function of Three Variables

يمكن تعميم تعاريف النهايات والاستمرارية لتوابع بمتحولين على التوابع بثلاث متحولات عن طريق اعتبار نقاط (x, y, z) ضمن الكرة المفتوحة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\delta^2$، حيث مركز الكرة النقطة (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها.



تعريف استمرارية تابع بثلاث متحولات Def. of Continuity of a Function of Three Variables

يكون f تابع لثلاث متحولات مستمر عند نقطة (x_0,y_0,z_0) من منطقة مفتوحة R إذا كان $f(x_0,y_0,z_0)$ معرفاً ومساوياً لنهاية $f(x,y,z)$ عندما تسعى (x,y,z) إلى (x_0,y_0,z_0)، أي $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$. يكون التابع f مستمر على منطقة مفتوحة R إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط R.

على سبيل المثال التابع $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$ مستمر عند كافة النقاط باسثناء النقاط التي تحقق العلاقة التالية $z=x^2+y^2$.

3. المشتقات الجزئية Partial Derivatives

المشتقات الجزئية للتوابع بمتحولين Partial Derivatives of a Function of Two Variables

تعريف: ليكن $z=f(x,y)$، بالتالي المشتقان الجزئيان لـ f بالنسبة لـ x و y هما التابعان f_x و f_y المعرفان كما يلي

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$ المشتق الجزئي بالنسبة لـ x

$$f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$ المشتق الجزئي بالنسبة لـ y

مثال 7: ليكن التابع $f(x,y)=3x-x^2y^2+2x^3y$، بالتالي

$$f_x(x,y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y$$
$$f_y(x,y) = -2x^2y + 2x^3$$

مثال 8: ليكن التابع $f(x,y) = (\ln x)(\sin x^2y)$، بالتالي

$$f_x(x,y) = (\ln x)(\cos x^2y)(2xy) + \frac{\sin x^2y}{x}$$
$$f_y(x,y) = (\ln x)(\cos x^2y)(x^2)$$

رمز المشتقات الجزئية Notation for First Partial Derivatives

من أجل $z = f(x,y)$، نرمز للمشتقين الجزئيين f_x و f_y ب

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$ المشتق الجزئي بالنسبة للمتحول x

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$ المشتق الجزئي بالنسبة للمتحول y

نرمز للمشتقان الجزئيان من المرتبة الأولى المحسوبان عند النقطة (a, b) ب

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} \quad \text{و} \quad f_y(a,b) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}.$$

مثال 9: ليكن التابع $f(x,y) = xe^{x^2y}$. أوجد المشتقان الجزئيان f_x و f_y واحسبهما عند النقطة $(1, \ln 2)$.

الحل:

$$f_x(x,y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y}$$
$$f_y(x,y) = xe^{x^2y}(x^2) = x^3e^{x^2y}$$

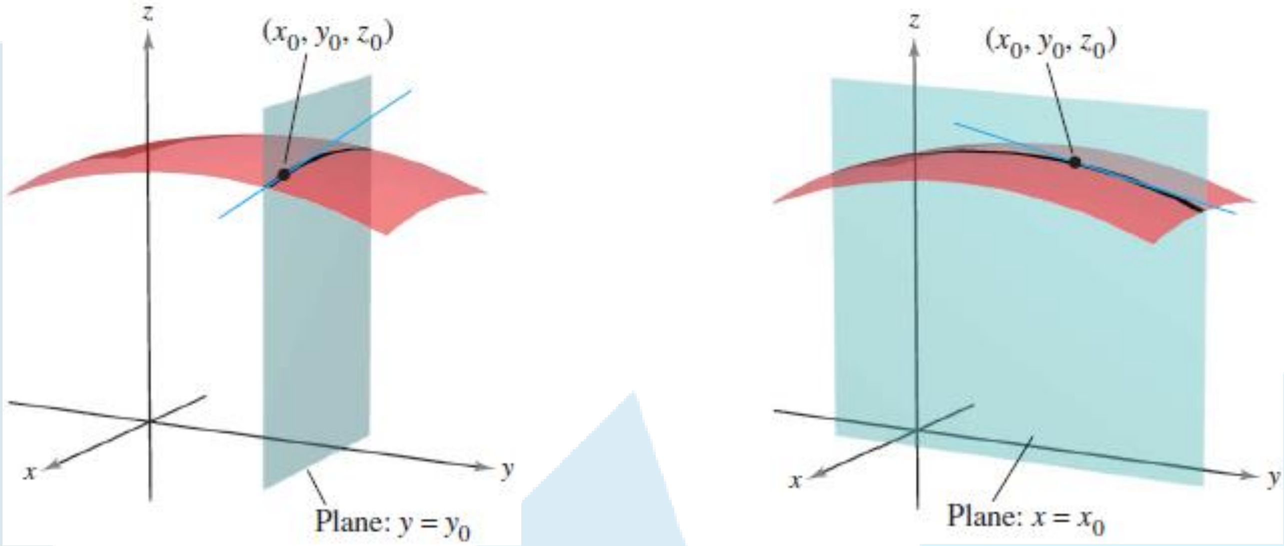
وقيمة كل من المشتقان عند النقطة $(1, \ln 2)$ هي

$$f_x(1,\ln 2)=e^{\ln 2}(2\ln 2)+e^{\ln 2}=4\ln 2+2$$
$$f_y(1,\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

التفسير الهندسي للمشتق الجزئي للتابع $z=f(x,y)$: ليكن $y=y_0$ ، بالتالي فإن $z=f(x,y_0)$ يمثل المنحني المشكل من تقاطع السطح $z=f(x,y)$ مع المستوي $y=y_0$، بالتالي $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ يمثل ميل المنحني عند النقطة $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

بشكل مشابه فإن $f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ يمثل ميل المنحني المعطى من تقاطع $z=f(x,y)$ مع المستوي $x=x_0$ عند عند النقطة $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

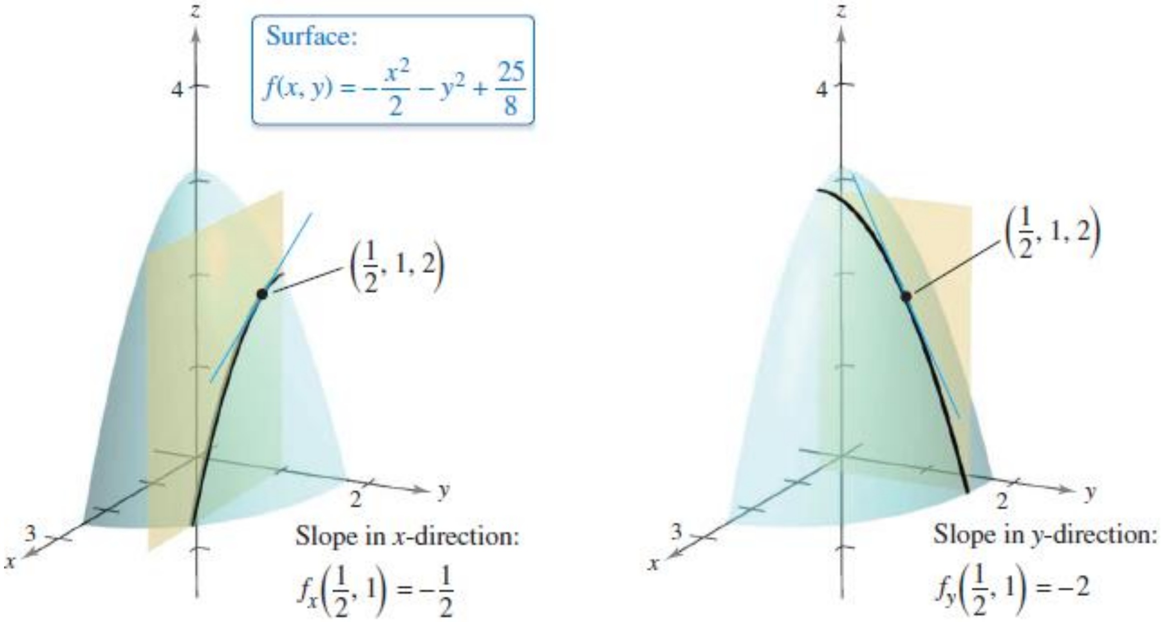
تشير قيمتا $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ عند النقطة (x_0,y_0,z_0) إلى ميل السطح في الإتجاهين x و y على الترتيب.



مثال 10: أوجد الميل في الإتجاهين x و y للسطح $f(x,y)=-\dfrac{x^2}{2}-y^2+\dfrac{25}{8}$ عند النقطة $(1/2, 1, 2)$.

الحل:

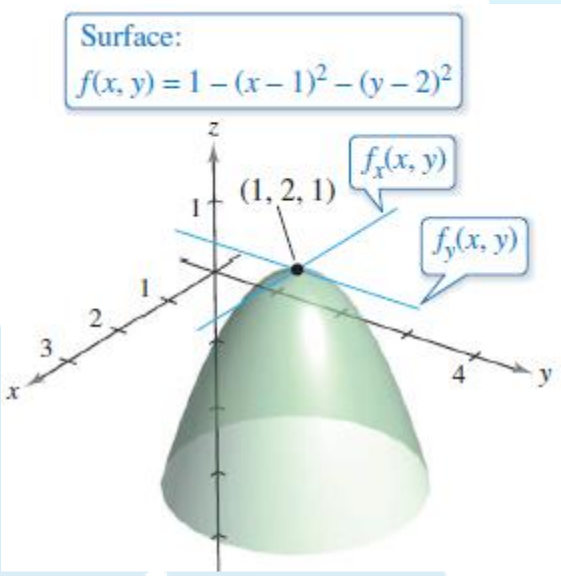
$$f_x(x,y) = -x, \quad f_y(x,y) = -2y$$
$$f_x(1/2,1) = -1/2, \quad f_y(1/2,1) = -2$$



مثال 11: أوجد الميل في الإتجاهين x و y للسطح $f(x,y) = 1-(x-1)^2-(y-2)^2$ عند النقطة $(1, 2, 1)$.

الحل:

$$f_x(x,y) = -2(x-1), \quad f_y(x,y) = -2(y-2)$$
$$f_x(1,2) = 0, \quad f_y(1,2) = 0$$



المشتقات الجزئية لتابع بثلاث متحولات Partial Deriv. of a Function of Three Variables

يمكن تعميم مفهوم المشتقات الجزئية إلى توابع بثلاث متحولات (أو أكثر). على سبيل المثال ليكن التابع $w = f(x, y, z)$ ، بالتالي يوجد ثلاث مشتقات جزئية التالية

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

مثال 12: المشتق الجزئي للتابع $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ بالنسبة للمتحول z هو $\partial/\partial z = [xy + yz^2 + xz] = 2yz + x$.

المشتقات من المراتب العليا Higher-Order Partial Derivatives

كما هو الحال بالنسبة للتوابع بمتحول واحد ، يمكن إيجاد المشتقات من المرتبة الثانية والثالثة ومن مراتب عليا. على سبيل المثال للتابع $z = f(x, y)$ المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية التالية

1. المشتق الثاني بالنسبة ل x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$
2. المشتق الثاني بالنسبة ل y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$
3. المشتق الأول بالنسبة ل x الثاني بالنسبة ل y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}$
4. المشتق الأول بالنسبة ل y الثاني بالنسبة ل x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}$

نسمي المشتقان الثالث والرابع بالمشتقات الجزئية المختلطة mixed partial derivatives.

مثال 13: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$.

الحل:

$$f_x(x,y)=3y^2+10xy^2,\quad f_y(x,y)=6xy-2+10x^2y$$
$$f_{xx}(x,y)=10y^2,\quad f_{yy}(x,y)=6x+10x^2$$
$$f_{xy}(x,y)=6y+20xy,\quad f_{yx}(x,y)=6y+20xy$$

مبرهنة 2: تساوي المشتقات الجزئية المختلطة Equality of Mixed Partial Derivatives

ليكن f تابع لمتحولين x و y بحيث f_{xy} و f_{yx} مستمران على قرص مفتوح R، بالتالي من أجل أي نقطة (x,y) من R لدينا $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$.

ملاحظة: تبقى المبرهنة السابقة صحيحة من أجل التوابع بثلاث متحولات (أو أكثر) لطالما المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة.

مثال 14: بين أن $f_{xz}=f_{zx}$ و $f_{xzz}=f_{zxz}=f_{zzx}$ من أجل التابع

$$f(x,y,z)=ye^x+x\ln z$$

الحل:

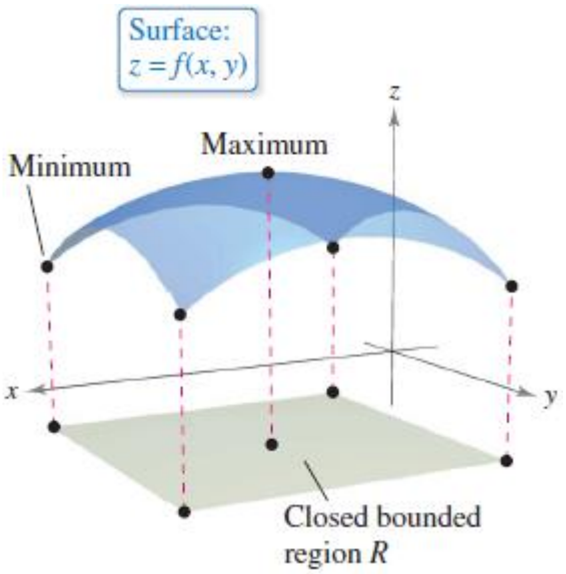
$$f_x(x,y,z)=ye^x+\ln z,\quad f_z(x,y,z)=x/z$$
$$f_{xz}(x,y,z)=1/z,\quad f_{zx}(x,y,z)=1/z,\quad f_{zz}(x,y,z)=-x/z^2$$
$$f_{xzz}(x,y,z)=-1/z^2,\quad f_{zxz}(x,y,z)=-1/z^2,\quad f_{zzx}(x,y,z)=-1/z^2$$

4. القيم القصوى لتابع بمتحولين Extrema of Functions of Two Variables

القيم القصوى المطلقة والنسبية Absolute Extrema and Relative Extrema

مبرهنة 3: ليكن f تابع لمتحولين x و y مستمر معرف على منطقة مغلقة R في المستوي xy

1. يوجد على الأقل نقطة واحدة في R حيث يأخذ التابع عندها قيمة صغرى.
2. يوجد على الأقل نقطة واحدة في R حيث يأخذ التابع عندها قيمة عظمى.



تعريف القيم القصوى النسبية Definition of Relative Extrema

ليكن f تابع معرف على منطقة R تحوي النقطة (x_0, y_0).

1. للتابع f قيمة صغرى نسبية relative minimum عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ من أجل كل (x, y) في قرص مفتوح يحوي (x_0, y_0).
2. للتابع f قيمة عظمى نسبية relative maximum عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ من أجل كل (x, y) في قرص مفتوح يحوي (x_0, y_0).

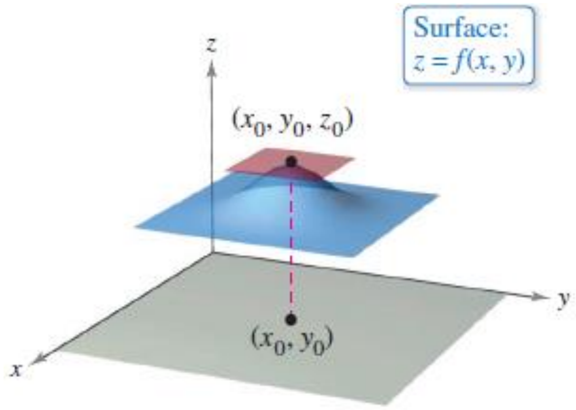
تعريف النقطة الحرجة Definition of Critical Point

ليكن f تابع معرف على منطقة مفتوحة R تحوي النقطة (x_0, y_0). تكون النقطة (x_0, y_0) نقطة حرجة critical point للتابع f إذا تحقق أحد الشرطين التاليين

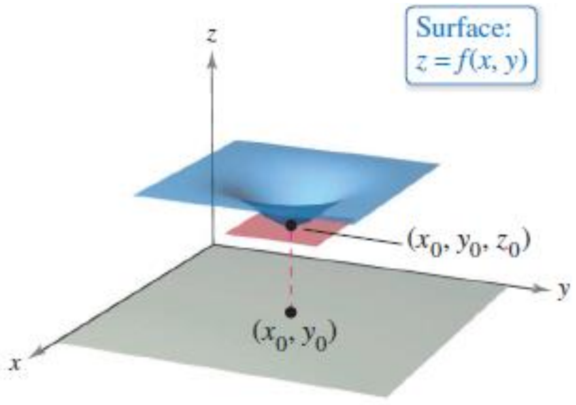
1. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
2. $f_x(x_0, y_0)$ أو $f_y(x_0, y_0)$ غير موجود.

مبرهنة 4: إذا كان للتابع f قيمة قصوى عند النقطة (x_0, y_0) على منطقة مفتوحة R، بالتالي (x_0, y_0) نقطة حرجة للتابع f.

مما سبق ينتج أن للتابع f مستوي مماس أفقي horizontal tangent plane عند النقطة (x_0, y_0)، كما يبينه الشكل التالي



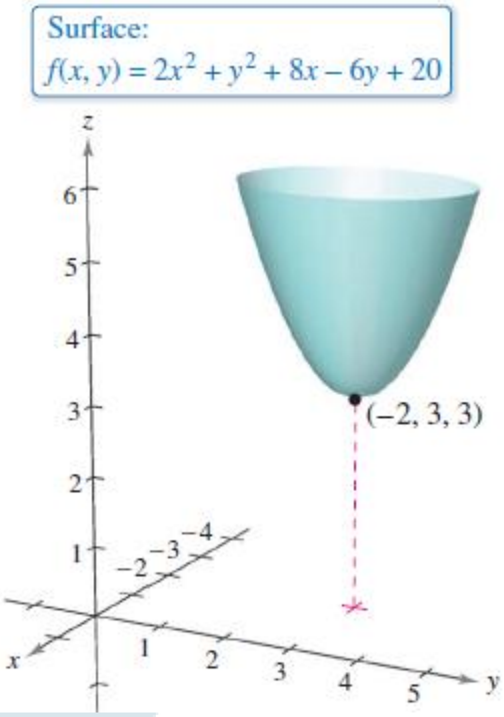
Relative maximum



Relative minimum

مثال 15: أوجد القيم القصوى للتابع $f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20$

الحل:



$$f_x(x,y)=4x+8, \quad f_y(x,y)=2x-6$$

النقاط الحرجة هي فقط النقاط التي تعدم المشتقان الجزئيان $4x+8=0, \quad 2x-6=0$. بحل المعادلتين نحصل على النقطة الحرجة الوحيدة $(-2,3)$. من أجل كل النقاط $(x,y)\neq(-2,3)$ لدينا (بعد الاتمام إلى مربع كامل)

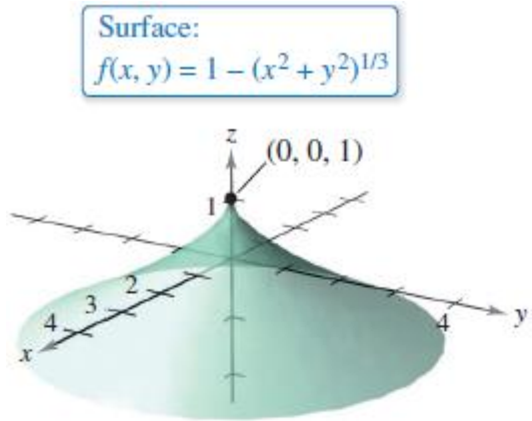
$$f(x,y)=2(x+2)^2+(y-3)^2+3>3$$

بالتالي للتابع f قيمة صغرى نسبية عند النقطة $(-2,3)$.

القيمة الصغرى النسبية هي $f(-2,3)=3$ كما يبينه الشكل جانباً.

مثال 16: أوجد القيم القصوى للتابع $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}$

الحل:



$$f_x(x,y) = \frac{2x}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{3(x^2+y^2)^{2/3}}$$

من الواضح أن المشتقان الجزئيان موجودان من أجل كل نقاط المستوي xy عدا النقطة $(0,0)$.

كما أن هذان المشتقان الجزئيان لا يمكنهما أن يكونا معدومان في آن واحد إلا عند النقطة $(0,0)$، بالتالي $(0,0)$ هي النقطة الوحيدة الحرجة، كما أن $f(0,0)=1$.

من الواضح أن $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/3}<1$، بالتالي للتابع قيمة عظمى نسبية عند $(0,0)$.

اختبار المشتق الثاني The Second Partials Test

مبرهنة 5: اختبار المشتق الثاني The Second Partials Test

ليكن للتابع f مشتقات جزئية مستمرة على منطقة مفتوحة تحوي نقطة (a,b)، حيث $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$.

من أجل اختبار القيم القصوى نشكل المقدار $d=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$

1. إذا كان $d>0$ و $f_{xx}(a,b)>0$، بالتالي للتابع f قيمة صغرى نسبية عند النقطة (a,b).
2. إذا كان $d>0$ و $f_{xx}(a,b)<0$، بالتالي للتابع f قيمة عظمى نسبية عند النقطة (a,b).
3. إذا كان $d<0$، بالتالي النقطة $(a,b,f(a,b))$ هي نقطة سرجية saddle point.
4. الإختبار لا يعطي أي معلومة في حال $d=0$.

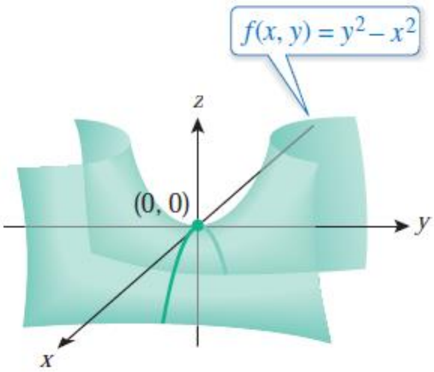
ملاحظة: يمكن الحصول على المقدار d بحساب المحدد التالي، وحيث أن $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$

$$d=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

ملاحظة: النقطة السرجية لا تمثل لا قيمة صغرى نسبية ولا قيمة عظمى سرجية.

مثال 17: أوجد القيم القصوى للتابع $f(x,y)=y^2-x^2$

الحل:



$$f_x(x,y)=-2x, \quad f_y(x,y)=2y$$
$$f_{xx}(x,y)=-2, \quad f_{yy}(x,y)=2$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0$$

بحل المعادلتين $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$، نحصل على نقطة حرجة واحدة $(0,0)$. بحساب المقدار d عند تلك النقطة نحصل على $d=f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-[f_{xy}(0,0)]^2=-4<0$. بالتالي النقطة $(0,0)$ هي نقطة سرجية.

مثال 17: أوجد القيم القصوى للتابع $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$

الحل:

$$f_x(x,y) = -3x^2 + 4y\,,$$
$$f_y(x,y) = 4x - 4y$$

النقاط الحرجة هي فقط النقاط التي تعدم المعادلتين

$$-3x^2 + 4y = 0, \quad 4x - 4y = 0$$

بحلهما نحصل على النقطتين $(0,0)$ و $(4/3, 4/3)$

$$f_{xx}(x,y) = -6x\,, \quad f_{yy}(x,y) = -4$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$$

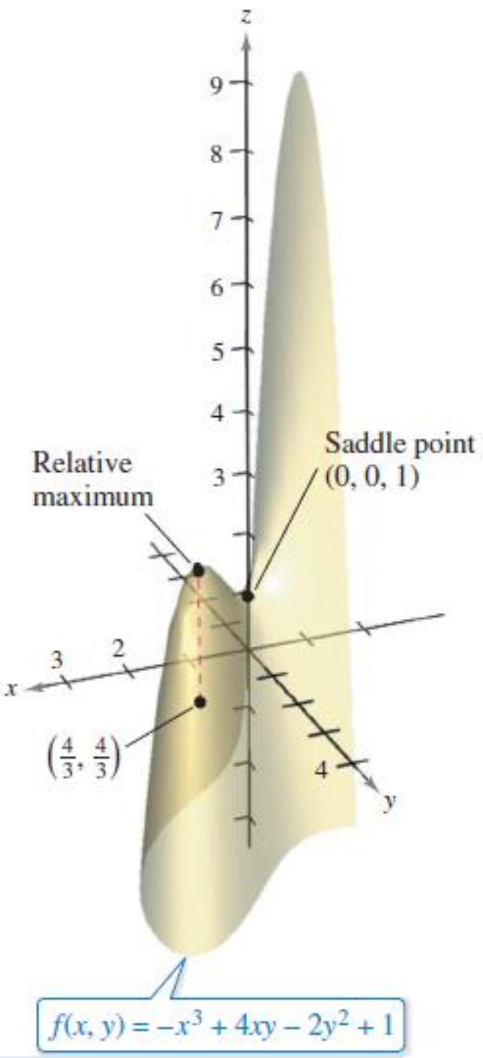
عند النقطة $(0,0)$

$$d = f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -16$$

أصغر من الصفر، بالتالي النقطة $(0,0,1)$ هي نقطة سرجية.

أما عند النقطة $(4/3, 4/3)$

$$d = f_{xx}(\frac{4}{3},\frac{4}{3}) f_{yy}(\frac{4}{3},\frac{4}{3}) - [f_{xy}(\frac{4}{3},\frac{4}{3})]^2$$
$$= 16 > 0$$



وبما أن $f_{xx}(4/3, 4/3) = -6(4/3) = -8 < 0$، نستنتج أن للتابع f قيمة عظمى نسبية عند النقطة $(4/3, 4/3)$.

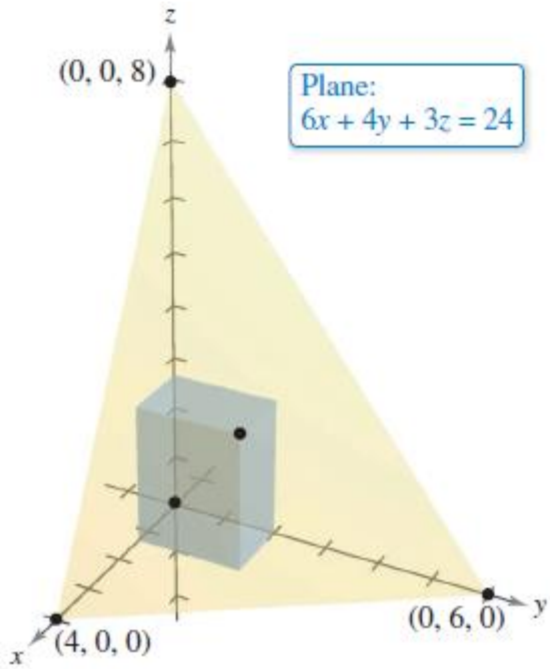
5. تطبيقات القيم القصوى Applications of Extrema

مسائل الأمثلية Applied Optimization Problems

مثال 18: علبة على شكل متوازي مستطيلات، حيث أحد رؤوسها تقع غفي المبدأ والرأس المقابل لها تقع في المستوي الذي معادلته $6x + 4y + 3z = 24$. أوجد الحجم الأعظمي للعلبة.

الحل:

ليكن x, y, z أبعاد العلبة، بما أن أحد الرؤوس يقع في المستوي $6x + 4y + 3z = 24$، بالتالي $z = (24-6x-4y)/3$ والحجم يعطى بالعلاقة $V(x,y) = xy(24-6x-4y)/3$.



$$V_x(x,y) = \frac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2)$$

$$= \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y)$$

$$V_y(x,y) = \frac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy)$$

$$= \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y)$$

$$V_x(x,y) = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x,y) = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على النقاط الحرجة $(0,0)$ و $(4/3,2)$.

من أجل النقطة $(0,0)$ يكون الحجم صفر، ومن أجل النقطة $(4/3,2)$ نطبق الإختبار الثاني للمشتق

$$V_{xx}(x,y) = -4y, \quad V_{yy}(x,y) = -\frac{8x}{3}$$

$$V_{xy}(x,y) = V_{yx}(x,y) = \frac{1}{3}(24 - 12x - 8y)$$

وبما أن

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)V_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) - \left[V_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)\right]^2 = (-8)\left(-\tfrac{32}{9}\right) - \left(-\tfrac{8}{3}\right)^2 = \tfrac{64}{3} > 0$$

و $V_{xx}(4/3,2) = -8 < 0$، بالتالي النقطة $(4/3,2)$ قيمة عظمى للتابع V، والحجم الأعظمي هو $V(4/3,2) = 64/9$ وحدة مكعبة.

مثال 19: تحدد شركة مصنعة للالكترونيات ربحها P مقدراً بالدولار الذي تحصل عليه من إنتاج وبيع x قطعة من تلفزيونات LCD و y قطعة من تلفزيونات بلاسما مقرباً بالنموذج التالي

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$$

أوجد مستوى الإنتاج الذي يحقق الربح الأعظمي. ماهو الربح الأعظمي؟

الحل:

$$P_x(x,y) = 8 - 0.001(2x + y), \quad P_y(x,y) = 10 - 0.001(x + 2y)$$

بوضع المعادلتين السابقتين مساويتين للصفر ومن ثم حلهما نحصل على نقطة حرجة وحيدة $x = 2000$ و $y = 4000$.

$$P_{xx}(2000,4000) = -0.002, \quad P_{yy}(2000,4000) = -0.002$$
$$P_{xy}(2000,4000) = -0.001, \quad P_{yx}(2000,4000) = -0.001$$

$$P_{xx}(2000,4000)P_{yy}(2000,4000) - [P_{xy}(2000,4000)]^2 > 0$$

وبما أن $P_{xx} < 0$ بالتالي مستوى الإنتاج $x = 2000$ و $y = 4000$ يحقق ربح أعظمي. الربح الأعظمي هو

$$P(2000,4000) = \$18000$$

طريقة المربعات الصغرى The Method of Least Squares

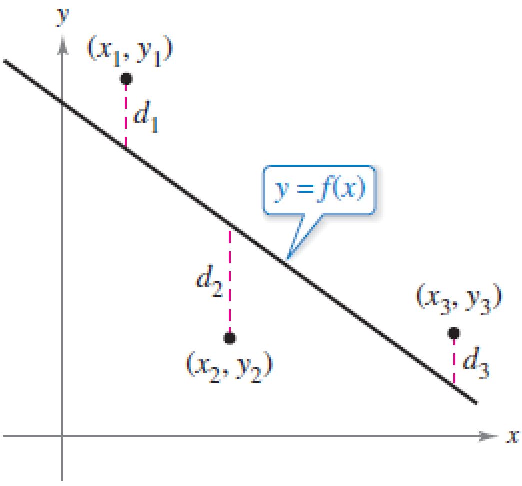
مسألة شائعة في العمل التجريبي experimental work وهي الحصول على علاقة رياضية من الشكل $y = f(x)$ بين متحولين x و y، تمرير منحني في المستوي إلى مجموعة من النقاط التي حصلنا عليها تجريبياً $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$. من بين هذه المنحنيات:

a) خط مستقيم: $y = a + bx$

b) كثير حدود من الدرجة الثانية: $y = a + bx + cx^2$

c) كثير حدود من الدرجة الثالثة: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

نسمي العلاقة الرياضية السابقة بالنموذج الرياضي mathematical models للظاهرة التي أنتجت النقاط التجريبية.



من أجل معرفة مدى ملاءمة النموذج $y = f(x)$ للنقاط $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$، نقوم بحساب مجموع مربعات الفروق بين القيم الحقيقية ل y والقيم المحسوبة من النموذج sum of the squared errors

$$S = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

في الإحصاء نسمي النموذج الخطي الذي يقلل ما أمكن أخطاء minimizes المقدار S الانحدار الخطي البسيط Least Squares Regression Line.

مبرهنة 6: الانحدار الخطي البسيط Least Squares Regression Line

الانحدار الخطي البسيط للنقاط $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ تعطى بالعلاقة $f(x) = ax + b$، حيث

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{and} \quad b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$