1. التكاملات المتتابعة والمساحة في المستوي Iterated Integrals and Area in the Plane

التكاملات المتتابعة Iterated Integrals

يمكن تعميم التكاملات المحددة للتوابع بمتحول واحد إلى التوابع متعددة المتحولات. على سبيل المثال، باعتبار y ثابت، يمكن تطبيق نظرية التكامل الأساسية في التكامل لحساب التكامل بالنسبة ل x

$$\int_1^{2y} 2xy\,dx = x^2y\Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

x is the variable of integration and y is fixed.

Replace *x* by the limits of integration.

The result is a function of y.

بنفس الطريقة يمكن المكاملة بالنسبة ل y باعتبار x ثابت. يمكن تلخيص الإجرائيتين كما يلي

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x,y)\,dx = f(x,y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y),y) - f(h_1(y),y)$$ بالنسبة ل x

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x))$$ بالنسبة ل y

مثال 1: احسب $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\,dy$

الحل:

$$\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\,dy = \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2\right]_1^x$$

Integrate with respect to y.

$$= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2\right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1\right)$$

$$= 3x^2 - 2x - 1.$$

مثال 2: احسب $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\,dy\right]dx$

الحل:

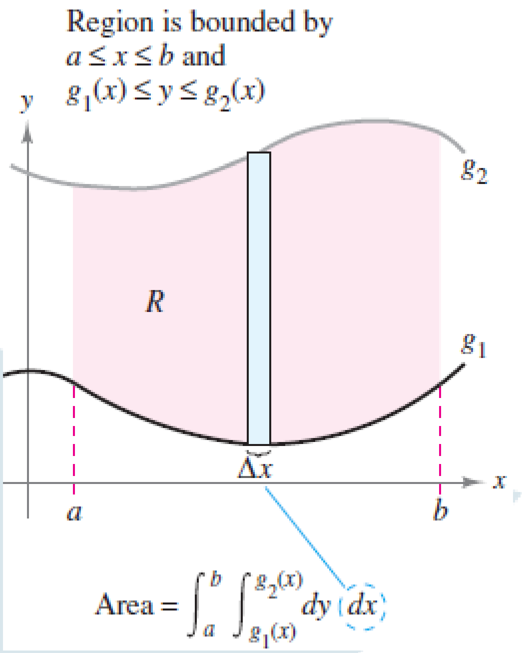
$$\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy\right] dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1)\, dx$$

$$= \left[x^3 - x^2 - x\right]_1^2 \qquad \text{Integrate with respect to } x.$$

$$= 2 - (-1) = 3.$$

نسمي تكامل المثال السابق بالتكامل المتتابع.

Area of a Plane Region مساحة منطقة مستوية



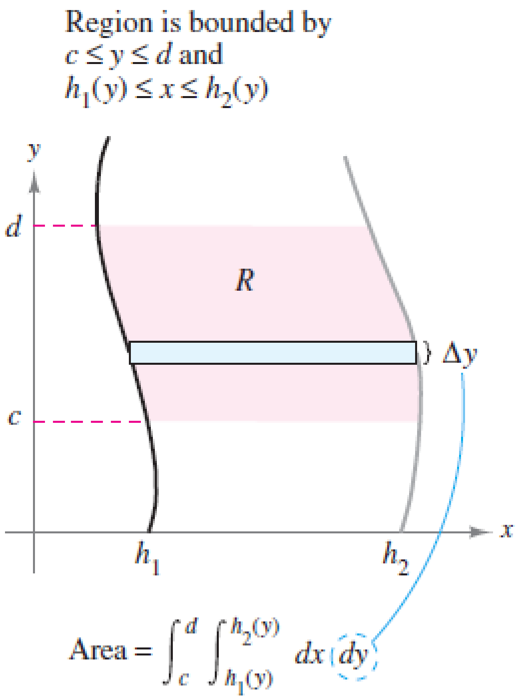
لتكن المنطقة R في المستوي المحدودة ب $a \le x \le b$ و $g_1(x) \le y \le g_2(x)$، كما هو مبين في الشكل جانباً. مساحة المنطقة R هي $\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx$. باستخدام النظرية الأساسية في التكامل نستطيع كتابة $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y\,\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x)$، بالتالي

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx = \int_a^b y\,\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx$$

بشكل مشابه يمكن حساب المساحة بتغيير ترتيب $dxdy$، كما هو مبين أداه.

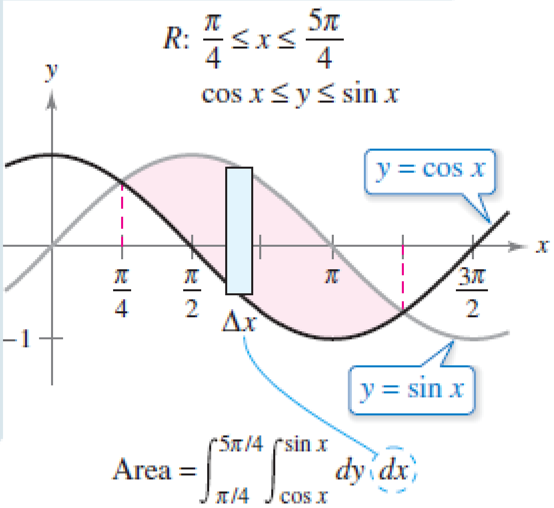
مساحة منطقة في المستوي



1. لتكن المنطقة R في المستوي المعرفة ب $a \le x \le b$ و $g_1(x) \le y \le g_2(x)$، حيث g_1 و g_2 مستمران على المجال $[a, b]$، بالتالي مساحة R هي $A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ (مستطيل ممثل عمودي vertical representative rectangle).

2. لتكن المنطقة R في المستوي المعرفة ب $c \le y \le d$ و $h_1(y) \le x \le h_2(y)$، حيث h_1 و h_2 مستمران على المجال $[c, d]$، بالتالي مساحة R هي $A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$ (مستطيل ممثل أفقي horizontal representative rectangle).

مثال 3: باستخدام التكامل المتتابع احسب مساحة المنطقة المحصورة بين بيان التابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ بين القيمتين $x = \pi/4$ و $x = 5\pi/4$.

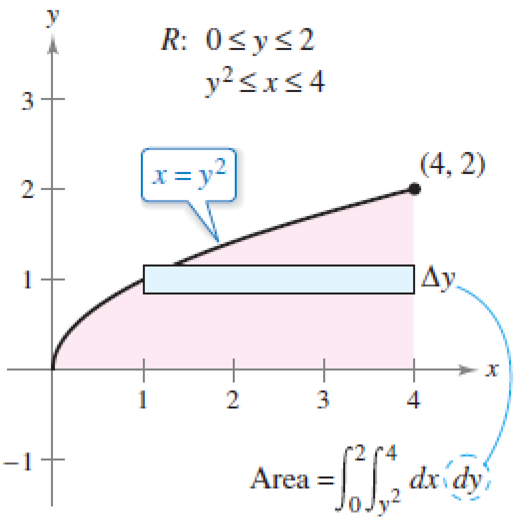


الحل:

$$\begin{aligned}
\text{Area of } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\sin x} dy\, dx \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big]_{\cos x}^{\sin x} dx \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[-\cos x - \sin x \Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\
&= 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

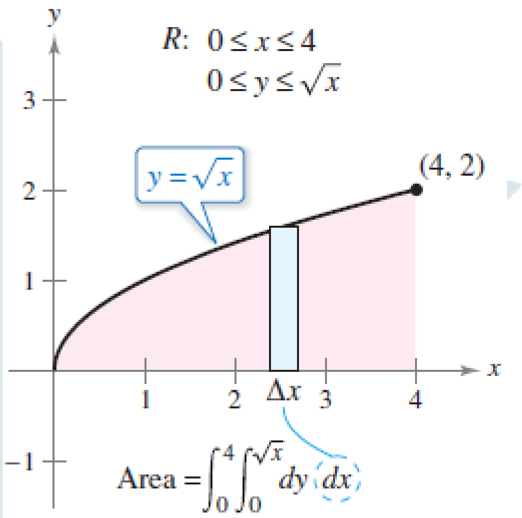
مثال 4: ارسم المنطقة التي مساحتها ممثلة بالتكامل $\int_0^2\int_{y^2}^4 dx\,dy$. من ثم أوجد تكامل متتابع آخر باستخدام الترتيب $dydx$ لتمثيل نفس المساحة وبين أن التكاملين يؤديان إلى نفس النتيجة.

الحل:



$$\int_0^2\int_{y^2}^4 dx\,dy = \int_0^2 x\Big]_{y^2}^4 dy$$
$$= \int_0^2 (4 - y^2)\,dy$$
$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$
$$= \frac{16}{3}.$$

يمكن تمثيل المساحة بالتكامل التالي $\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx$

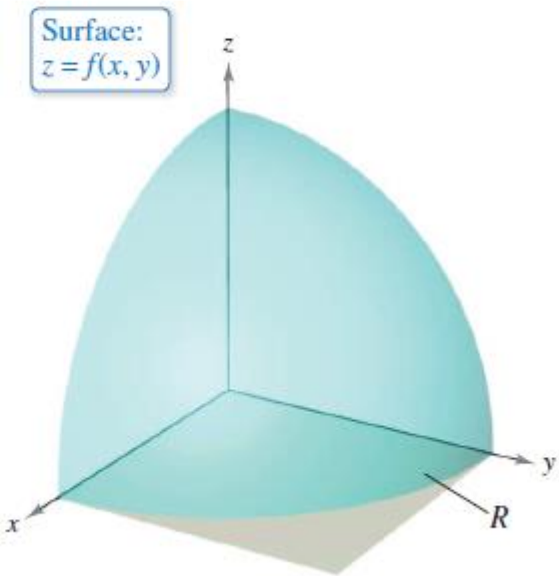


$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^4 y\Big]_0^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4$$
$$= \frac{16}{3}$$

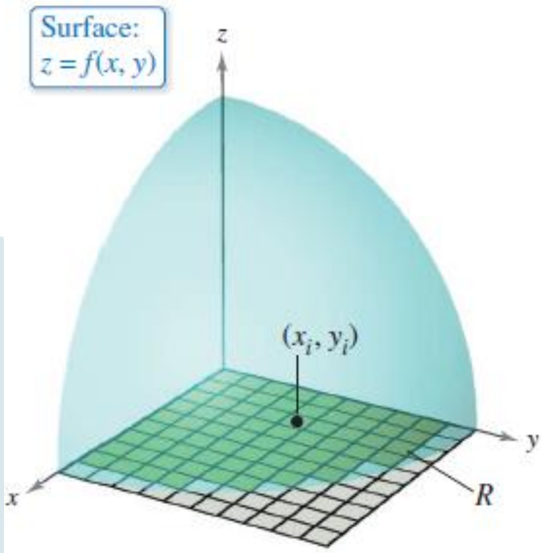
2. التكامل الثنائي والحجم Double Integrals and Volume

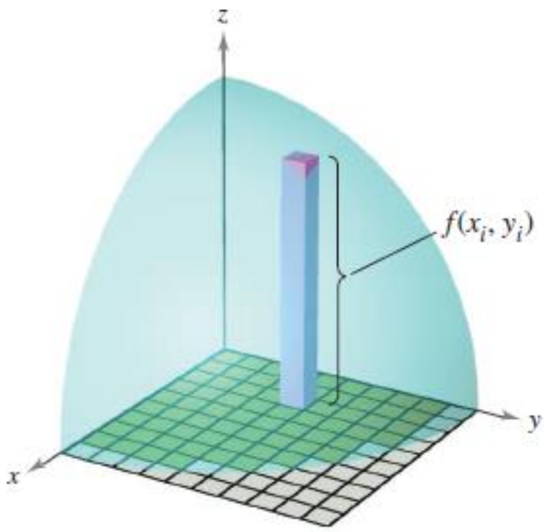
التكامل الثنائي وحجم منطقة صلبة Double Integrals and Volume of a Solid Region

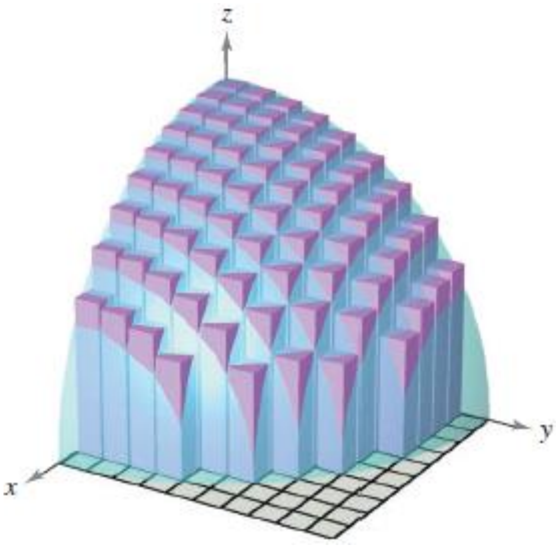
ليكن التابع المستمر f بحيث $f(x, y) \geq 0$ من أجل كل (x, y) في منطقة R من المستوي xy. الهدف هو إيجاد حجم المنطقة الصلبة الكائنة بين السطح المعطى بالعلاقة $z = f(x, y)$ والمستوي ، كما هو مبين في الشكل جانباً.



يمكن تقريب حجم المنطقة الصلبة المذكورة باستخدام مجموع ريمان Riemann sum لحجوم ال n موشور $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$ ، حيث $f(x_i, y_i)$ ارتفاع الموشور رقم i و ΔA_i مساحة المستطيل رقم i.







تعريف التكامل الثنائي Definition of Double Integral

ليكن التابع f معرف على منطقة مغلقة محدودة R في المستوي xy، بالتالي التكامل الثنائي ل f على R هو

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|\Delta\|\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

إذا وجدت النهاية نقول عن f أنه قابل للمكاملة على R.

ملاحظة: النظيم $\|\Delta\|$ هو أكبر عرض أو طول لأي مستطيل من ال n مستطيل.

حجم منطقة صلبة Volume of a Solid Region

إذا كان التابع f قابل للمكاملة على منطقة R في المستوي xy و $f(x, y) \geq 0$ من أجل كل (x, y) في R، بالتالي حجم المنطقة الصلبة التي تكمن فوق R وتحت بيان f هو $V = \iint_R f(x,y)\,dA$.

مبرهنة 1: خصائص التكامل الثنائي Properties of Double Integrals

ليكن f و g مستمران على منطقة مغلقة محدودة R في المستوي xy وليكن c ثابت ما.

1. $\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$
2. $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \iint_R g(x,y)\,dA$

$$3.\ \iint_R f(x,y)\,dA \ge 0, \quad \text{if } f(x,y) \ge 0$$

$$4.\ \iint_R f(x,y)\,dA \ge \iint_R g(x,y)\,dA, \quad \text{if } f(x,y) \ge g(x,y)$$

$$5.\ \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

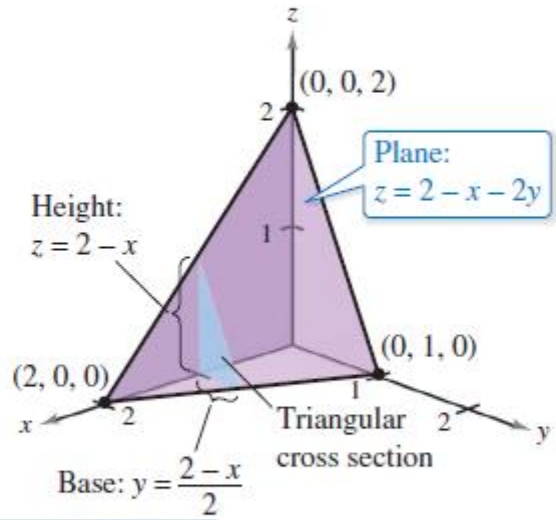
حيث المنطقة R هي اجتماع المنطقتين R_1 و R_2 غير المتداخلتين.

حساب التكامل الثنائي Evaluation of Double Integrals

ليكن لدينا المنطقة الصلبة المحدودة بالمستوي $z = f(x,y) = 2 - x - 2y$ والنقاط الثلاث من المستوي، كما هو مبين في الشكل أ.

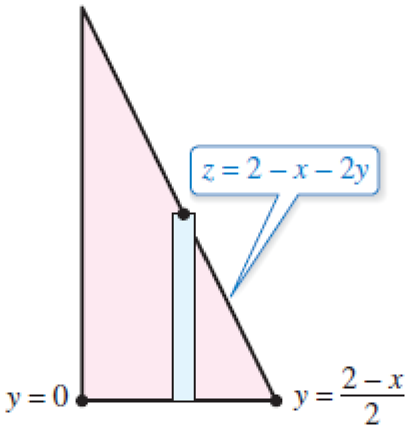
أي مقطع عمودي للمنطقة موازي للمستوي yz هو مثلث قاعدته $(2-x)/2$ وارتفاعه $(2-x)$، بالتالي مساحة المثلث هي

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}$$



$$\text{Volume} = \int_a^b A(x)\,dx$$
$$= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4}\,dx$$
$$= -\frac{(2-x)^3}{12}\Big]_0^2$$
$$= \frac{2}{3}.$$

الإجرائية السابقة تعمل بغض النظر عن كيفية الحصول على $A(x)$. وبشكل خاص، يمكن الحصول عليها باستخدام التكامل، كما يبينه الشكل جانباً، حيث يتم اعتبار x ثابت.



$$A(x) = \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\, dy$$

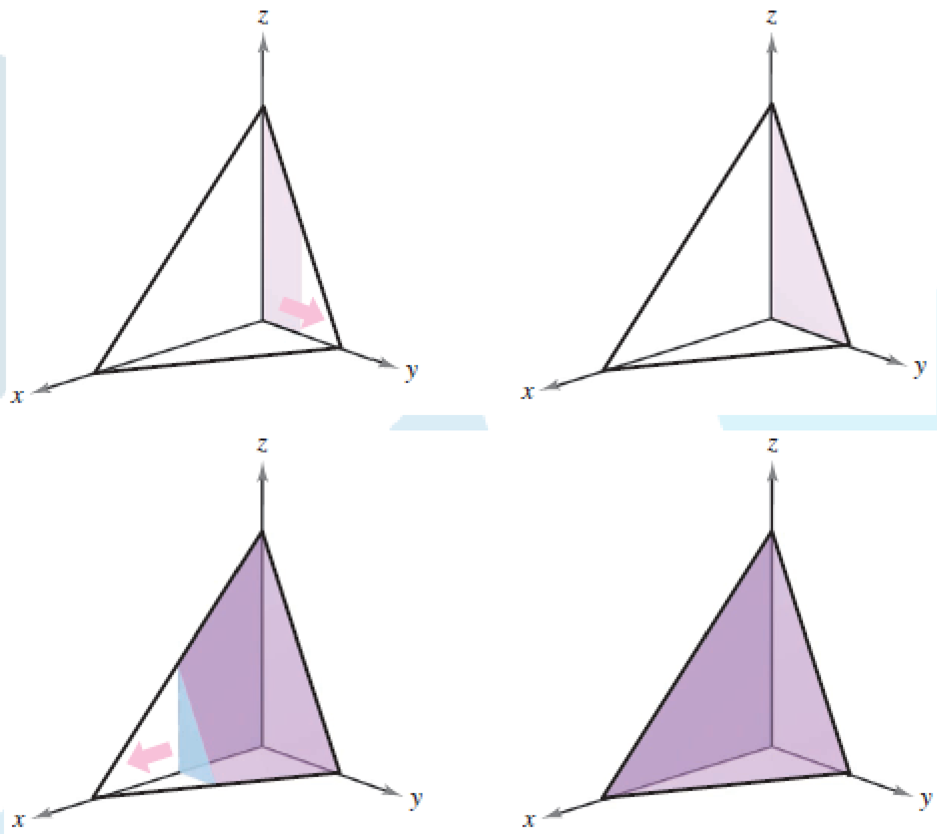
$$= \Big[(2 - x)y - y^2\Big]_0^{(2-x)/2}$$

$$= \frac{(2 - x)^2}{4}.$$

بتجميع النتائج السابقة، نحصل على تكامل متتابع

$$\text{Volume} = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

لفهم الإجرائيية السابقة بشكل أفضل نتخيل التكامل الداخلي على أنه يمسح خط عمودي يمسح المقطع العرضي، أما التكامل الخارجي فهو المقطع العرضي الذي يمسح الحجم، كما يبينه الشكل التالي



مبرهنة 2: مبرهنة فوبيني Fubini's Theorem

ليكن f مستمر على منطقة R من المستوي

1. إذا كانت R معرفة ب $a \le x \le b$ و $g_1(x) \le y \le g_2(x)$، حيث g_1 و g_2 مستمران على المجال $[a, b]$، بالتالي

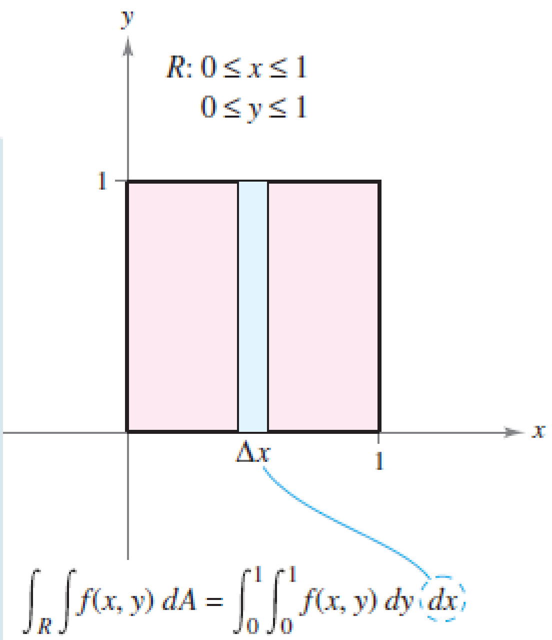
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx.$$

2. إذا كانت R معرفة ب $c \le y \le d$ و $h_1(x) \le x \le h_2(x)$، حيث h_1 و h_2 مستمران على المجال $[c, d]$، بالتالي

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx\,dy.$$

مثال 5: احسب $\iint_R \left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dA$، حيث R معرفة ب $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

الحل:



$$\iint_R \left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)y-\frac{y^3}{6}\right]_0^1 dx$$

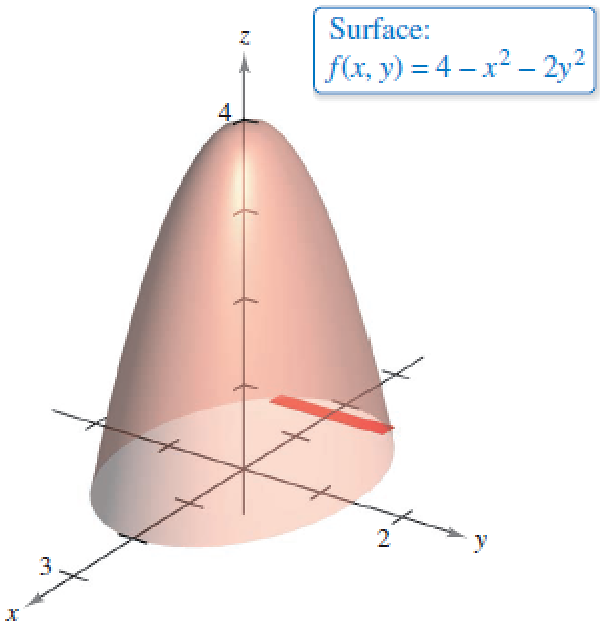
$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

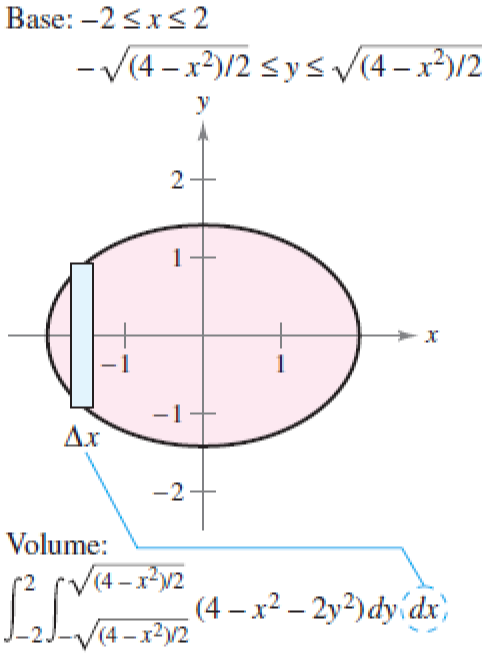
$$= \left[\frac{5}{6}x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

مثال 6: أوجد حجم المنطقة الصلبة المحددة بمجسم القطع المكافئ $z = 4-x^2-2y^2$ و المستوي xy

الحل:





قاعدة المنطقة في المستوي xy $(z=0)$ هي قطع ناقص $x^2 + 2y^2 = 4$.

حدود المتحول y هي $-\sqrt{\dfrac{(4-x^2)}{2}} \le y \le \sqrt{\dfrac{(4-x^2)}{2}}$، وحدود المتحول x هي $-2 \le x \le 2$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{4}{3\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16\cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{64}{3\sqrt{2}}(2)\int_{0}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta \\
&= \frac{128}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

القيمة الوسطى لتابع Average Value of a Function

وجدنا سابقاً أن القيمة الوسطى لتابع f بمتحول واحد على المجال $[a,b]$ هي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. هذا ويمكن تعميم ذلك على التوابع بمتحولين كما يلي

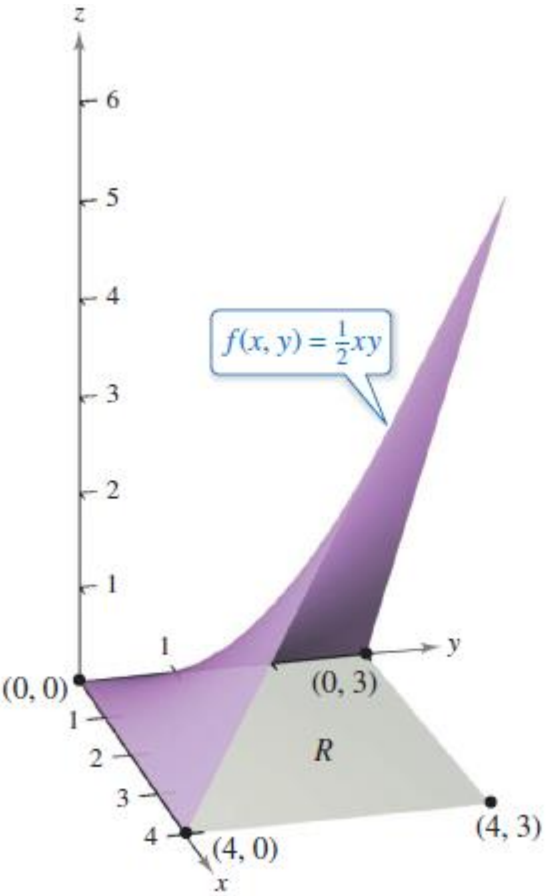
تعريف القيمة الوسطى لتابع على منطقة

إذا كان التابع f قابل للمكاملة على منطقة R في المستوي xy، بالتالي القيمة الوسطى للتابع على R هي $\frac{1}{A}\iint_R f(x,y)dA$، حيث A هي مساحة R.

مثال 7: أوجد القيمة الوسطى للتابع $f(x,y)=\frac{1}{2}xy$ على منطقة R، حيث R تمثل مستطيل رؤوسه النقاط $(0, 0), (4, 0), (4, 3), (0, 3)$.

الحل:

مساحة المنطقة هي $A=12$. كما أن حدود التكامل من أجل x هي $0 \le x \le 4$ ومن أجل y هي $0 \le y \le 3$. بالتالي القيمة الوسطى هي

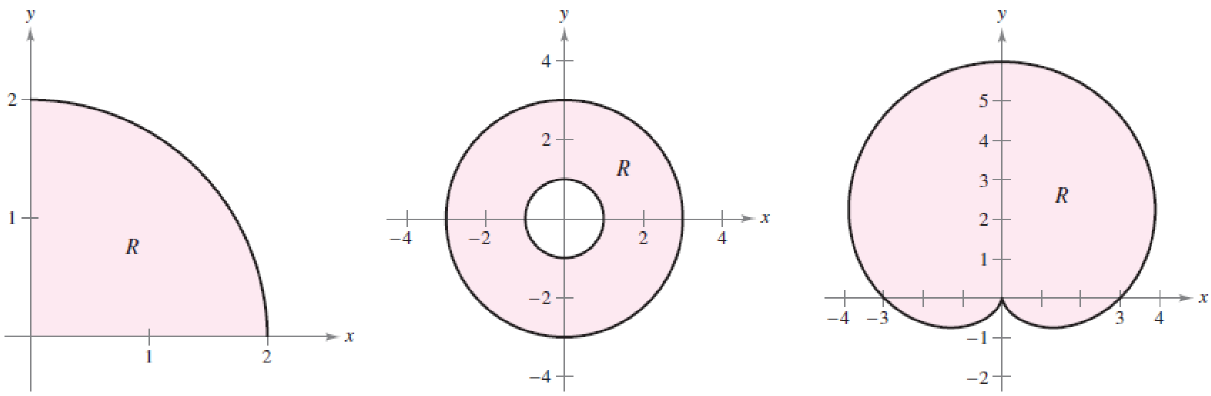


$$\begin{aligned}
\text{Average value} &= \frac{1}{A}\int_R\int f(x, y)\, dA \\
&= \frac{1}{12}\int_0^4\int_0^3 \frac{1}{2}xy\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{12}\int_0^4 \frac{1}{4}xy^2\Big]_0^3\, dx \\
&= \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\int_0^4 x\, dx \\
&= \frac{3}{16}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= \left(\frac{3}{16}\right)(8) \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

التكامل الثنائي في الاحداثيات القطبية Double Integrals in Polar Coordinates

من السهل أحياناً حساب التكامل الثنائي باستخدام الاحداثيات القطبية وخاصة عندما تكون المناطق عبارة عن دوائر أو أي أشكال قريبة منها، ومن أجل التكاملات التي تتضمن x^2+y^2.

مثال 8: استخدم الاحداثيات القطبية لتوصيف المناطق التالية



الحل:

الشكل اليساري ربع دائرة قطرها 2

$$R=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2,\quad 0\le\theta\le\pi/2\}$$

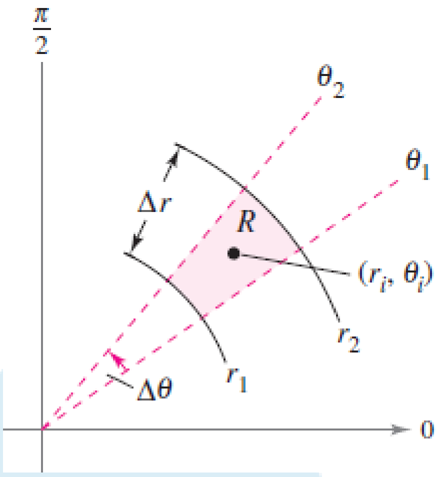
الشكل في الوسط محصور بين دائرتين نصف قطريهما 1 و 3

$$R=\{(r,\theta)\,|\,1\le r\le 3,\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$$

الشكل في اليمين منحني قلبي مع $a=b=3$

$$R=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 3+3\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$$

ملاحظة: المناطق في المثال السابق هي حالات خاصة من القطاعات القطبية polar sectors



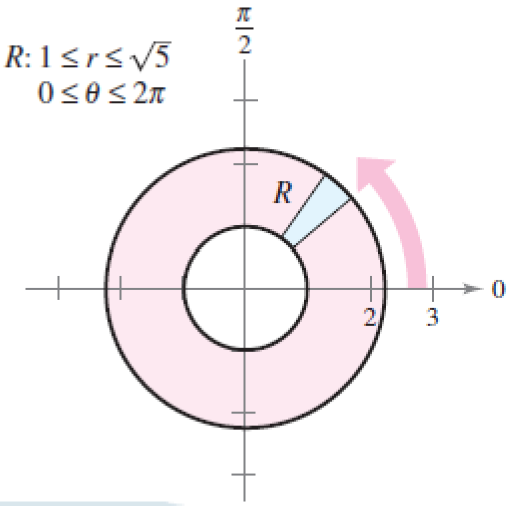
$$R=\{(r,\theta)\,|\,r_1\le r\le r_2,\quad \theta_1\le\theta\le\theta_2\}$$

مبرهنة 3: التكامل الثنائي في الاحداثيات القطبية Double Integrals in Polar Coordinates

لتكن R منطقة من المستوي تتألف من كافة النقاط $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ المحققة للشروط $0\le g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$، حيث $0\le\beta-\alpha\le 2\pi\}$. إذا كان g_1 و g_2 مستمران على المجال $[\alpha, \beta]$ و f مستمر على R، بالتالي

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مثال 9: لتكن R المنطقة المحصورة بين الدائرتين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=5$. احسب التكامل $\iint_R (x^2+y)\,dA$



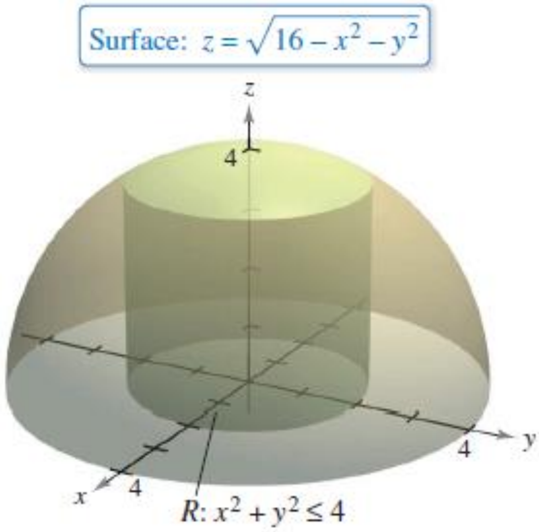
الحل:

الحدود القطبية هي $1\le r\le\sqrt{5}$ و $0\le\theta\le 2\pi$، كما هو مبين في الشكل جانباً.

كما أن $x^2=(r\cos\theta)^2$ و $y=r\sin\theta$، بالتالي

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2+y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\sin\theta)r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\sin\theta\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(3+3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\sin\theta\right)d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\cos\theta\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$

مثال 10: استخدم الاحداثيات القطبية لحساب حجم المنطقة الصلبة التي تحدها من الأعلى نصف الكرة $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ ومن الأسفل المنطقة الدائرية R المعطية بالعلاقة $x^2+y^2\le 4$.



الحل:

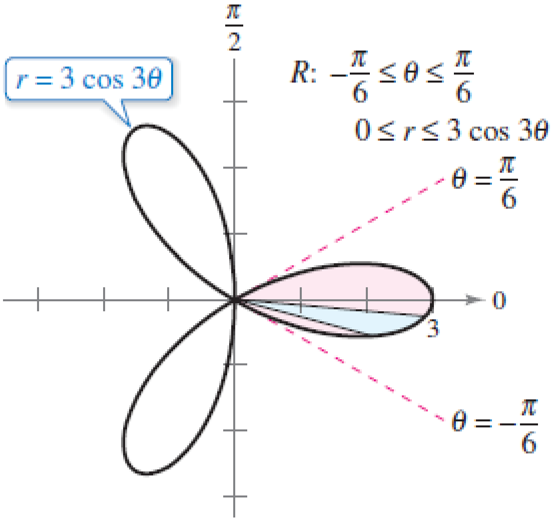
حدود المنطقة R هي

$-\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}, -2\le y\le 2$ و $0\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}$. وفي الاحداثيات القطبية $0\le r\le 2$ و $0\le\theta\le 2\pi$ مع ارتفاع $z=\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{16-r^2}$.

بالتالي فإن الحجم يساوي

$$
\begin{aligned}
V &= \int\!\!\int_R f(x,y)\,dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16-r^2)^{3/2}\Big]_0^2\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(24\sqrt{3}-64\right)d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3}-8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{16\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right) \\
&\approx 46.979.
\end{aligned}
$$

مثال 11: استخدم الاحداثيات القطبية لحساب مساحة الشكل جانباً $r = 3\cos 3\theta$، لتكن R قطعة واحدة من المنحني والحدود في هذه الحالة هي $-\pi/6 \le \theta \le \pi/6$ و $0 \le r \le 3\cos 3\theta$.



الحل:

$$\frac{1}{3}A = \iint_R dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{r^2}{2}\Big]_0^{3\cos 3\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\Big[\theta + \frac{1}{6}\sin 6\theta\Big]_{-\pi/6}^{\pi/6}$$

$$= \frac{3\pi}{4}.$$

بالتالي فإن $A = 9\pi/4$.

3. مركز الكتل وعزوم العطالة Center of Mass and Moments of Inertia

تعريف الكتلة لصفيحة مستوية Def. of Mass of a Planar Lamina of Variable Density

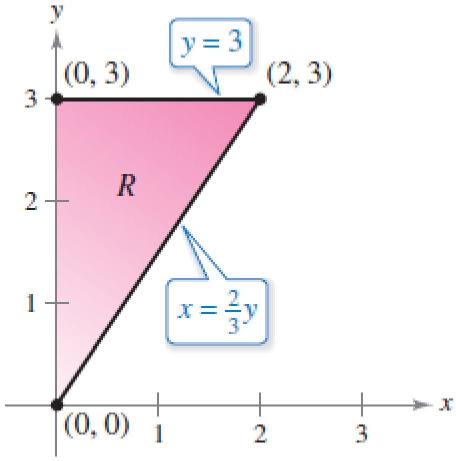
ليكن ρ تابع الكثافة مستمراً على صفيحة الموافقة لمنطقة R في المستوي، بالتالي كتلة الصفيحة m تعطى بالعلاقة التالية

$$m = \iint_R \rho(x, y)\,dA.$$

مثال 12: أوجد كتلة الصفيحة المثلثية التي رؤوسها $(0, 0), (0, 3), (2, 3)$، وبفرض أن تابع الكثافة عند النقطة (x, y) هو $\rho(x, y) = 2x + y$.

الحل:

كما هو مبين في الشكل جانباً، حدود المنطقة R هي التالية $x=0$ و $y=3$ و $y=3x/2$ (أو $x=2y/3$).



$$\begin{aligned} m &= \iint_R (2x+y)\,dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x+y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^3 \Big[x^2+xy\Big]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9}\int_0^3 y^2\,dy \\ &= \frac{10}{9}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

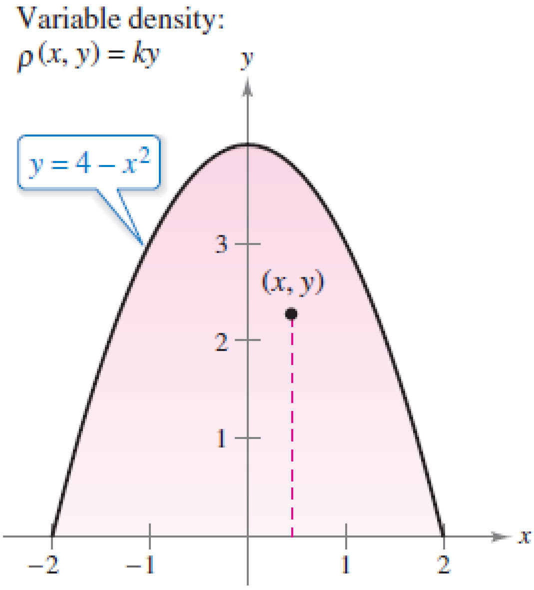
عزوم ومركز العطالة الكتل Moments and Center of Mass

ليكن ρ تابع الكثافة مستمراً على صفيحة مستوية R. عزما الكتلة moments of mass بالنسبة للمحوران x و y هما $M_x = \iint\limits_R y\,\rho(x,y)dA$ و $M_y = \iint\limits_R x\,\rho(x,y)dA$.

إذا كانت m كتلة الصفيحة، بالتالي مركز الكتلة center of mass هو $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right)$.

مثال 13: أوجد مركز كتلة الصفيحة الموافقة لمنطقة القطع المكافئ $0 \le y \le 4-x^2$، وبفرض أن تابع الكثافة عند النقطة (x, y) متناسب مع بعد النقطة (x, y) عن المحور x.

الحل:



بما أن الصفيحة متناظرة بالنسبة للمحور y وأن $\rho(x,y)=ky$ ، بالتالي مركز الكتلة يقع على المحور y و $\bar{x}$. لإيجاد $\bar{y}$ علينا إيجاد كتلة الصفيحة أولاً

$$\text{Mass} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky\,dy\,dx$$
$$= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} y^2\Big]_0^{4-x^2} dx$$
$$= \frac{k}{2}\int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,dx$$
$$= \frac{k}{2}\left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$
$$= k\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{256k}{15}$$

وبعدها نوجد العزم حول المحور x

$$M_x = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} (y)(ky)\,dy\,dx$$
$$= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} y^3\Big]_0^{4-x^2} dx$$
$$= \frac{k}{3}\int_{-2}^{2} (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx$$
$$= \frac{k}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{4096k}{105}$$

بالتالي $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{4096k/105}{256k/15} = \dfrac{16}{7}$ ومركز الكتلة هو $(\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \dfrac{16}{7}\right)$.

عزوم العطالة Moments of Inertia

نسمي العزمان M_x و M_y المستخدمان في إيجاد مركز كتلة صفيحة بالعزوم من المرتبة الأولى first moments حول المحورين x و y.

$$M_x = \iint_R \underset{\substack{\text{Distance}\\ \text{to } x\text{-axis}}}{(y)}\underbrace{\rho(x, y)\,dA}_{\text{Mass}} \qquad M_y = \iint_R \underset{\substack{\text{Distance}\\ \text{to } y\text{-axis}}}{(x)}\underbrace{\rho(x, y)\,dA}_{\text{Mass}}$$

يمكن تعميم ذلك لإيجاد العزوم من المرتبة n. على سبيل المثال العزمان من المرتبة الثانية second moment (أو عزما العطالة moment of inertia) هما، حيث نرمز لهما بالرمزان I_x و I_y.

$$I_x = \iint_R \underset{\substack{\text{Square of distance}\\ \text{to } x\text{-axis}}}{(y^2)}\underbrace{\rho(x, y)\,dA}_{\text{Mass}} \qquad I_y = \iint_R \underset{\substack{\text{Square of distance}\\ \text{to } y\text{-axis}}}{(x^2)}\underbrace{\rho(x, y)\,dA}_{\text{Mass}}$$

مثال 14: أوجد عزمي العطالة حول المحور x للصفيحة في المثال السابق.

الحل:

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y^2(ky)\,dy\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} y^4\Big]_0^{4-x^2}\,dx \\
&= \frac{k}{4}\int_{-2}^{2} (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8)\,dx \\
&= \frac{k}{4}\left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{32{,}768k}{315}.
\end{aligned}$$

4. مساحة السطوح Surface Area

تعريف مساحة سطح Definition of Surface Area

إذا كان f ومشتقاته الجزئية مستمرة على منطقة مغلقة R في المستوي xy، بالتالي مساحة السطح S المعطى ب $z = f(x, y)$ على المنطقة R تعطى بالتكامل التالي

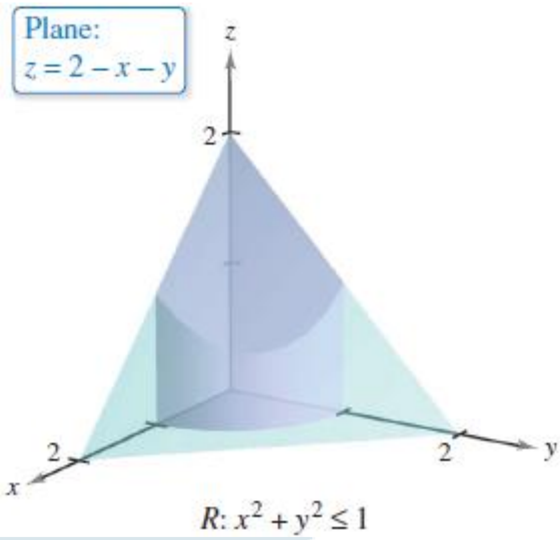
$$S = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$$

مثال 15: أوجد مساحة السطح من المستوي $z = 2 - x - y$ الذي يقع فوق الدائرة $x^2 + y^2 \le 1$ في الربع الأول.

الحل:

بما أن $f_x(x, y) = f_y(x, y) = -1$، بالتالي

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dA \\ &= \iint_R \sqrt{3}\, dA \\ &= \sqrt{3} \iint_R dA. \end{aligned}$$



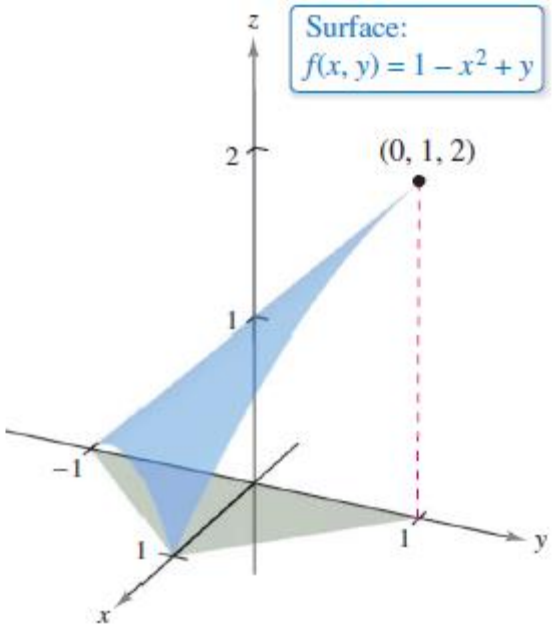
من الملاحظ أن التكامل الأخير هو $\sqrt{3}$ مساحة المنطقة R. بما أن R هي ربع دائرة مساحتها هي $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$، بالتالي المساحة المطلوبة هي

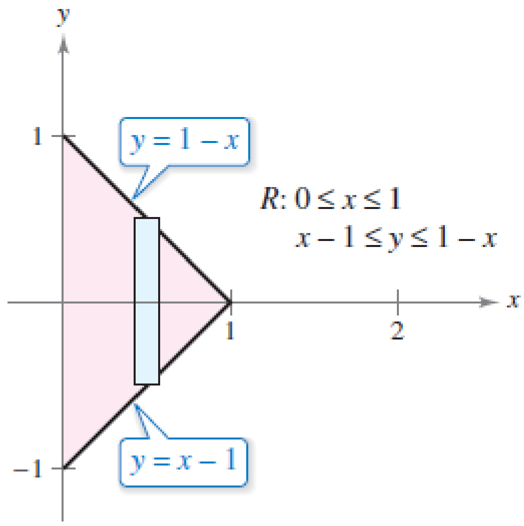
$$S = \sqrt{3}\,(\text{area of } R) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

مثال 16: أوجد مساحة السطح من التابع $f(x, y) = 1 - x^2 + y$ الذي يقع فوق المنطقة المثلثية التي رؤوسها $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 1, 0)$.

الحل:

بما أن $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = 1$، بالتالي



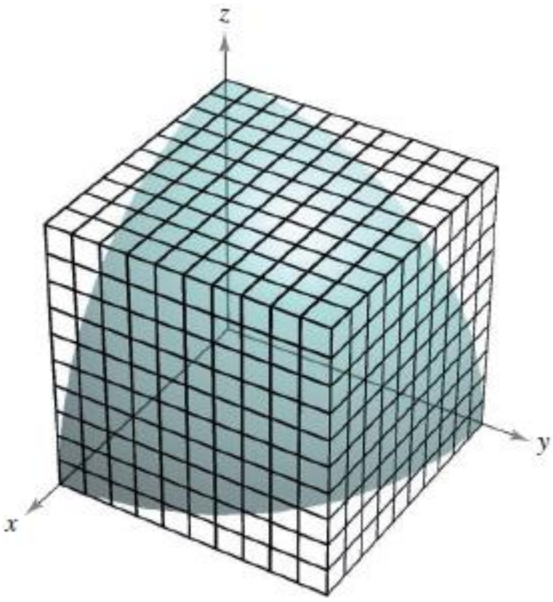


$$S = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA = \int_R\int \sqrt{1 + 4x^2 + 1}\, dA.$$

حدود المنطقة R هي $0 \le x \le 1$ و $x - 1 \le y \le 1 - x$، بالتالي

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 y\sqrt{2 + 4x^2}\,\Big]_{x-1}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[(1 - x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x - 1)\sqrt{2 + 4x^2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}\right) dx \qquad \text{Integration tables} \\
&= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{2 + 4x^2}\right) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6}\right]_0^1 \\
&= \sqrt{6} + \ln\left(2 + \sqrt{6}\right) - \sqrt{6} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} \\
&\approx 1.618.
\end{aligned}$$

5. التكامل الثلاثي Triple Integrals



الإجرائية المتبعة في حساب التكامل الثنائي هي نفسها في التكامل الثنائي. ليكن التابع لثلاث متحولات f معرف ومستمر على منطقة صلبة محدودة Q. لنقسم Q إلى شبكة من n صندوق boxes، كما هو مبين في الشكل جانباً.

حجم الصندوق رقم i هو $\Delta V_i = \Delta x_i \, \Delta y_i \, \Delta z_i$ نختار النقطة (x_i, y_i, y_i) داخل كل صندوق ونشكل مجموع ريمان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, y_i)\Delta V_i$. نأخذ النهاية لنحصل على التعريف التالي

تعريف التكامل الثلاثي Definition of Triple Integral

ليكن التابع لثلاث متحولات f معرف ومستمر على منطقة صلبة محدودة Q، بالتالي التكامل الثلاثي ل f على Q هو

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \lim_{\|\Delta\|\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, y_i)\Delta V_i$$

إذا وجدت النهاية نقول عن f أنه قابل للمكاملة على Q. حجم المنطقة الصلبة Q يعطى بالعلاقة $\text{Volume of } Q = \iiint_Q dV$

.

ملاحظة: النظيم $\|\Delta\|$ هو أكبر قيمة بين $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$.

بعض الخصائص من التكاملات الثنائية يمكن ذكرها

1. $\iiint_Q cf(x,y,z)dV = c\iiint_Q f(x,y,z)dV$
2. $\iiint_Q [f \pm g]\,dV = \iiint_Q f\,dV \pm \iiint_Q g\,dV$
3. $\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \iiint_{Q_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{Q_2} f(x,y,z)\,dV$

حيث المنطقة Q هي اجتماع المنطقتين Q_1 و Q_2 غير المتداخلتين.

مبرهنة 3: حساب التكامل الثلاثي بالتكامل المتتابع Evaluation by Iterated Integrals

ليكن f مستمر على منطقة صلبة Q معرفة ب $a \le x \le b$ و $h_1(x) \le y \le h_2(x)$ و $g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$، حيث h_1 و h_2 و g_1 و g_2 توابع مستمرة، بالتالي

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

مثال 15: احسب التكامل الثلاثي التالي $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y+2z)\,dz\,dy\,dx$

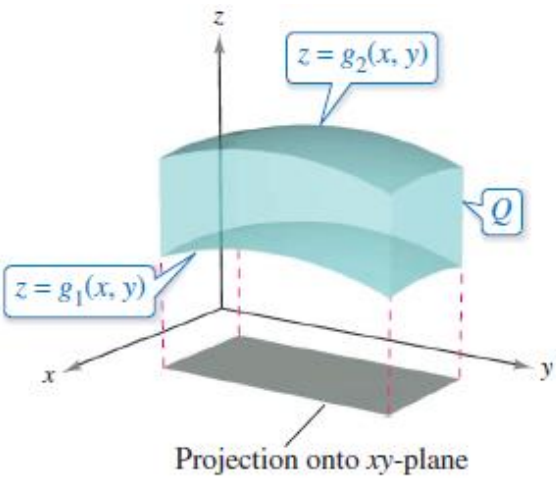
الحل:

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y+2z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^x e^x(yz+z^2)\Big]_0^{x+y} dy\,dx$$
$$= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2+3xy+2y^2)\,dy\,dx$$

$$\int_0^2 \int_0^x e^x(x^2+3xy+2y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[e^x\left(x^2y+\frac{3xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}\right)\right]_0^x dx$$
$$= \frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\,dx$$

$$\frac{19}{6}\int_0^2 x^3e^x\,dx = \frac{19}{6}\Big[e^x(x^3-3x^2+6x-6)\Big]_0^2$$
$$= 19\left(\frac{e^2}{3}+1\right)$$

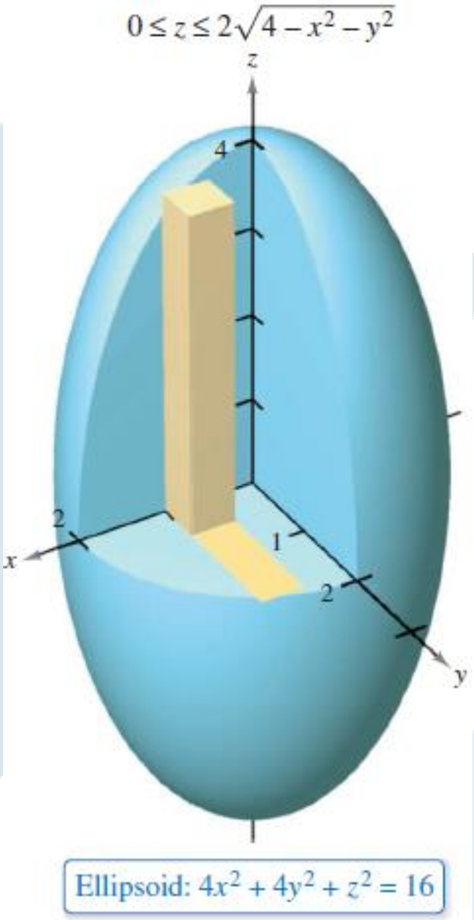
ملاحظة: لإيجاد حدود التكامل الثلاثي، من المستحسن تحديد حدود الحلقة الداخلية أولاً (يمكن أن تكون تابع للمتحولان الخارجيان الآخران). نقوم بإسقاط المنطقة Q على مستوي المتحولان الخارجيان، ونوجد حدود تكاملهما باستخدام طريقة التكامل الثنائي. على سبيل المثال لحساب $\iiint_Q f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$، نختار حدود المتحول الداخلي z ويأخذ التكامل عندها الشكل التالي $\iint\left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\,dx$. بإسقاط المنطقة Q على المستوي xy نقوم بحساب حدود المتحولين x و y كما هو الحال بالنسبة للتكامل الثنائي.



مثال 16: احسب حجم مجسم القطع الناقص التالي $4x^2+4y^2+z^2=16$

الحل:

يمكن اختيار ترتيب المتحولات كما يلي $dz\,dy\,dx$، ويمكن تبسيط الحسابات بسبب التناظر حيث نكتفي بحساب ثمن المجسم، كما هو مبين في الشكل جانباً. من أجل المتحول z، لدينا $0 \le z \le 2\sqrt{4-x^2-y^2}$ و $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ و $0 \le x \le 2$، بالتالي حجم مجسم القطع الناقص هو



Ellipsoid: $4x^2+4y^2+z^2=16$

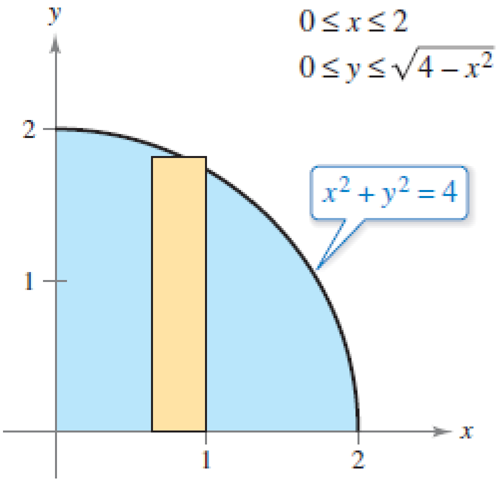
$$V = \iiint_Q dV$$

$$= 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\Big]_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\,dx$$

$$= 16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2}\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^2 \left[y\sqrt{4-x^2-y^2} + (4-x^2)\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$



$$= 8\int_0^2 [0 + (4-x^2)\arcsin(1) - 0 - 0]\, dx$$

$$= 8\int_0^2 (4-x^2)\left(\frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= 4\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{64\pi}{3}.$$

Center of Mass and Moments of Inertia مركز الكتل وعزوم العطالة

لتكن Q منطقة صلبة، حيث كثافتها معطية بتابع الكثافة ρ. مركز كتلة المنطقة Q التي كتلتها m هي $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$، حيث

$$m = \iiint_Q \rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{Mass of the solid}$$

$$M_{yz} = \iiint_Q x\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{First moment about } yz\text{-plane}$$

$$M_{xz} = \iiint_Q y\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{First moment about } xz\text{-plane}$$

$$M_{xy} = \iiint_Q z\rho(x, y, z)\, dV \qquad \text{First moment about } xy\text{-plane}$$

و $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{m}, \quad \bar{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$.

نسمي المقادير M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} بالعزوم من المرتبة الأولى للمنطقة Q حول المستويات yz, xz, xy على الترتيب.

تأخذ العزوم من المرتبة الأولى حول مستوي بينما العزوم من المرتبة الثانية (عزوم العطالة) فهي بالنسبة إللخط مستقيم. عزوم العطالة حول المحاور الأساسية هي

$$I_x = \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$ Moment of inertia about x-axis

$$I_y = \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$ Moment of inertia about y-axis

$$I_z = \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$ Moment of inertia about z-axis

مثال 17: أوجد مركز كتلة المكعب الواحدي المبين في الشكل جانباً، علماً أن الكثافة عند النقطة (x, y, z) متناسبة مع مربع المسافة عن المبدأ.

الحل:

من الواضح أن $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$

$$m = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

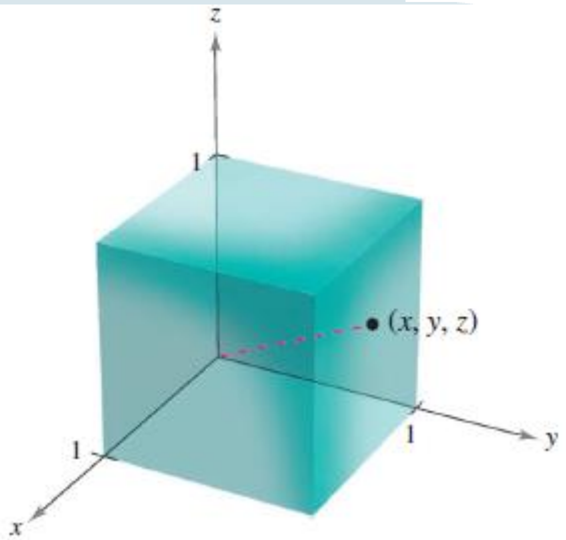
$$= k\int_0^1\int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 dy\, dx$$

$$= k\int_0^1\int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3}\right) dy\, dx$$

$$= k\int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= k\int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}\right) dx$$

$$= k\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3}\right]_0^1 = k$$



العزم حول المستوي yz هو

$$M_{yz} = k\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$
$$= k\int_0^1 x\left[\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\right]dx$$
$$= k\int_0^1 x\left(x^2+\frac{2}{3}\right)dx = k\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{3}\right]_0^1 = \frac{7k}{12}.$$

بالتالي

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

بما أن تابع الكثافة متناظر بالنسبة إلى المتحولات الثلاث، بالتالي لدينا $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$. أي أن مركز الكتلة هو $\left(\frac{7}{12},\frac{7}{12},\frac{7}{12}\right)$.

6. التكاملات الثلاثية في إحداثيات أخرى Triple Integrals in Other Coordinates

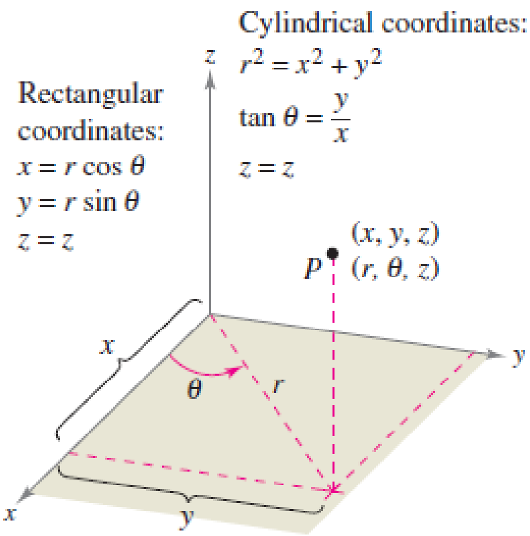
التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الاسطوانية Triple Integrals in Cylindrical Coordinates

الاحداثيات الاسطوانية Cylindrical Coordinates

في نظام الاحداثيات الاسطوانية، نمثل نقطة P في الفراغ بالثلاثية المرتبة (r,θ,z)، حيث

1. (r,θ) تمثل الاحداثيات القطبية لمسقط النقطة P على المستوي xy.
2. z هي المسافة الموجهة من (r,θ) إلى P.

التحويل من الاحداثيات الاسطوانية إلى الديكارتية



$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z$$

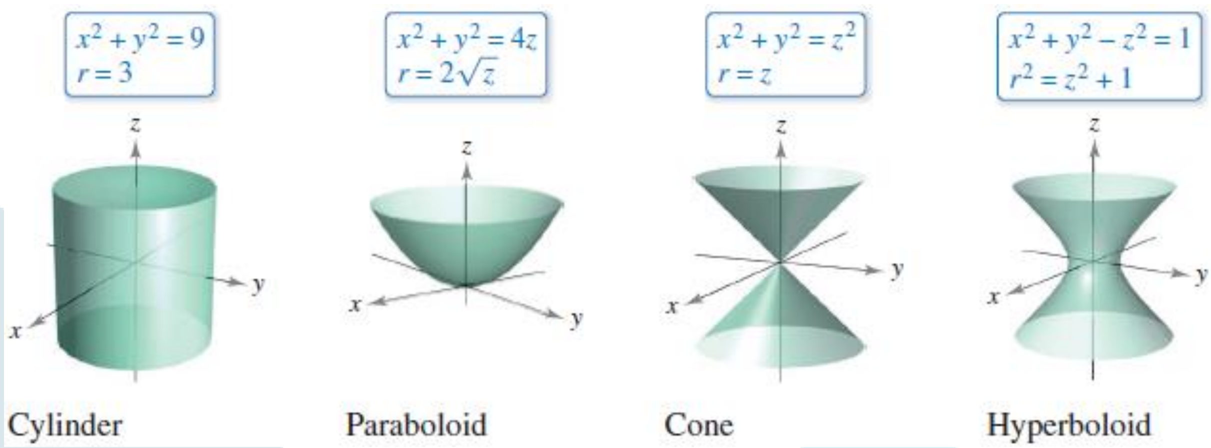
التحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى الاسطوانية

$$r^2 = x^2 + y^2,\quad \tan\theta = \frac{y}{x},\quad z = z$$

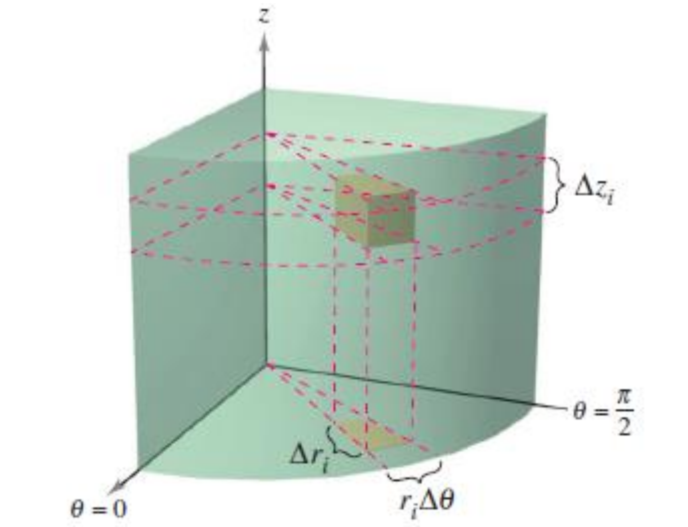
نسمي النقطة $(0, 0, 0)$ بالقطب.

ملاحظة: بما أن تمثيل نقطة في الاحداثيات القطبية ليس وحيد، يتبع من ذلك أن تمثيل نقطة في الاحداثيات الاسطوانية ليس وحيد أيضاً.

الاحداثيات الاسطوانية ملائمة لتمثيل السطوح الاسطوانية والسطوح الدورانية حول المحور z (محور التناظر)، كما يبينه الشكل التالي



في هذه الاحداثيات الاسطوانية، أبسط منطقة صلبة هي صندوق اسطواني محدد ب $r_1 \le r \le r_2$ و $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ و $z_1 \le z \le z_2$، كما يبينه الشكل أدناه



Volume of cylindrical block: $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i \Delta z_i$

للحصول على شكل الاحداثيات الاسطوانية للتكامل الثلاثي، نعتبر منطقة صلبة Q حيث مسقطها R على المستوي xy يمكن التعبير عنها بالاحداثيات القطبية. أي أن

$$Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R, \quad h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)$$

و $$R = \{(r, \theta) \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad g(\theta_1) \le r \le g(\theta_2)$$

إذا كان التابع f مستمر على المنطقة Q، بالتالي يمكن كتابة التكامل الثلاثي ل f على Q كما يلي

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dA$$

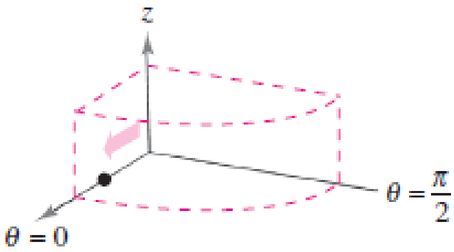
حيث يتم حساب التكامل الثنائي في الاحداثيات القطبية. بالتالي الشكل المتتابع للتكامل الثلاثي هو

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g(\theta_1)}^{g(\theta_2)} \int_{h_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{h_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

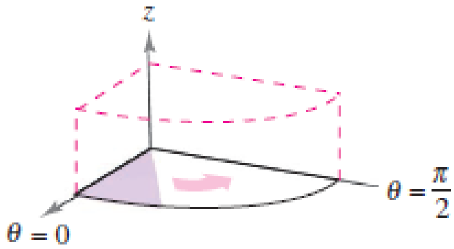
ملاحظة: يوجد 6 تراتيب ممكنة لإجراء التكامل

$$dz\,dr\,d\theta, dz\,d\theta\,dr, d\theta\,dz\,dr, d\theta\,dr\,dz, dr\,d\theta\,dz, dr\,dz\,d\theta$$

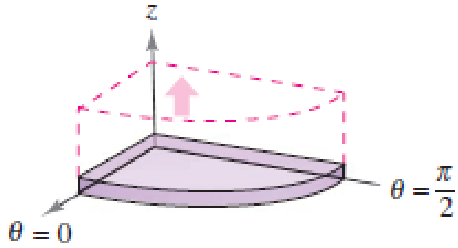
ليكن ترتيب التكامل هو $dr\,d\theta\,dz$، بالتالي عملية المسح التكاملي تتم على النحو التالي



Integrate with respect to r.



Integrate with respect to θ.



Integrate with respect to z.

مثال 18: احسب كتلة مجسم القطع الناقص Q التالي $4x^2+4y^2+z^2=16$ المتوضع فوق المستوي xy. الكثافة عند نقطة من المجسم متناسبة مع بعد النقطة عن المستوي xy.

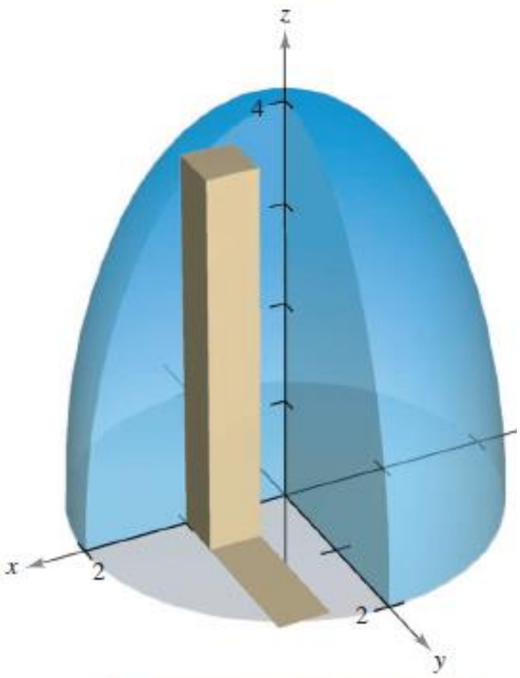
الحل:

تابع الكثافة هو $\rho(r,\theta,z)=kz$. حدود المتحول z حيث $0\le z\le\sqrt{16-4x^2-4y^2}=\sqrt{16-4r^2}$

و $0\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 2$، بالتالي الكتلة هي

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 z^2r\Big]_0^{\sqrt{16-4r^2}} dr\,d\theta \\ &= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (16r-4r^3)\,dr\,d\theta \\ &= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\Big[8r^2-r^4\Big]_0^2 d\theta \\ &= 8k\int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi k \end{aligned}$$

$0\le z\le\sqrt{16-4r^2}$



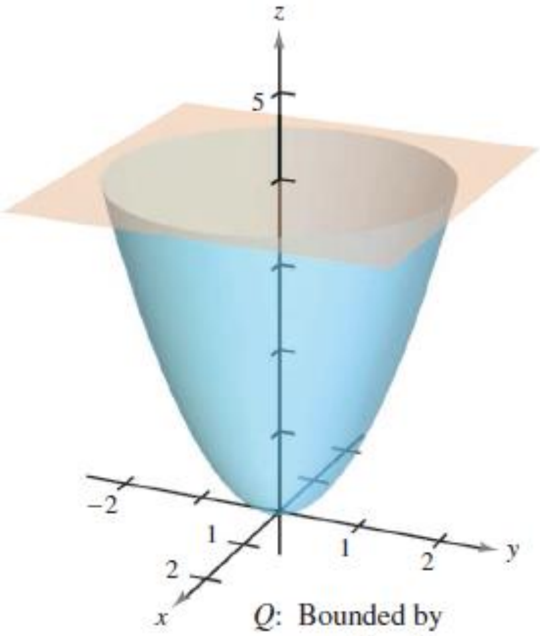
Ellipsoid: $4x^2+4y^2+z^2=16$

مثال 19: احسب عزم العطالة حول محور التناظر للجسم الصلب Q المحدد بمجسم القطع المكافئ $z=x^2+y^2$ والمستوي $z=4$. الكثافة عند نقطة من المجسم متناسبة مع بعد النقطة عن المستقيم z.

الحل:

تابع الكثافة $\rho(r,\theta,z)=k\sqrt{x^2+y^2}$، بالتالي

$$I_z=\iiint_Q k(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,dV$$



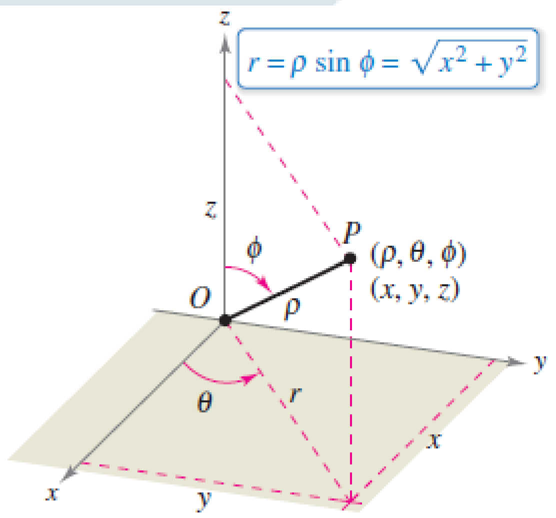
حدود r هي $0\le r\le\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z}$، بالتالي العزم هو

$$\begin{aligned}
I_z &= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r\,dr\,d\theta\,dz\\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\left.\frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{z}} d\theta\,dz\\
&= k\int_0^4\int_0^{2\pi}\frac{z^{5/2}}{5}\,d\theta\,dz\\
&= \frac{k}{5}\int_0^4 z^{5/2}(2\pi)\,dz
\end{aligned}$$

$$=\frac{2\pi k}{5}\left[\frac{2}{7}z^{7/2}\right]_0^4=\frac{512k\pi}{35}.$$

التكاملات الثلاثية في الإحداثيات الكروية Triple Integrals in Spherical Coordinates

الاحداثيات الكروية Spherical Coordinates



في نظام الاحداثيات الكروية، نمثل نقطة P في الفراغ بالثلاثية المرتبة (ρ,θ,ϕ)، حيث

1. ρ هي المسافة بين النقطة P والمبدأ، $\rho\ge 0$.
2. θ هي نفس الزاوية المستخدمة في الاحداثيات الاسطوانية من أجل $r\ge 0$ $(0\le\theta\le 2\pi)$.
3. ϕ هي الزاوية بين المحور z الموجب القطعة المستقيمة OP $(0\le\phi\le\pi)$.

ملاحظة: الاحداثيان الأول والثالث ρ,ϕ هما مقداران غير سالبان.

التحويل من الاحداثيات الكروية إلى الديكارتية

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

التحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى الكروية

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

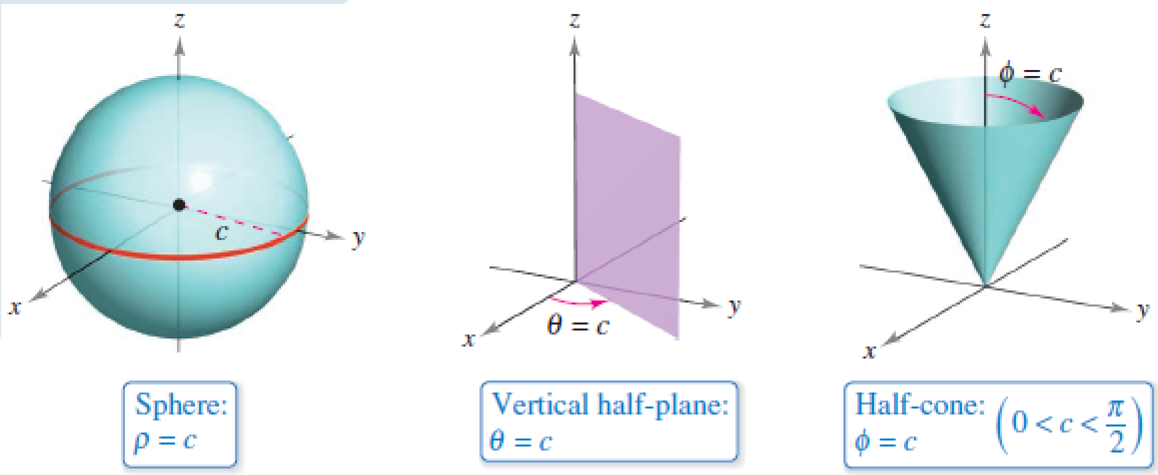
التحويل من الاحداثيات الكروية إلى الاسطوانية $(r \geq 0)$

$$r^2 = \rho^2\sin^2\phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho\cos\phi$$

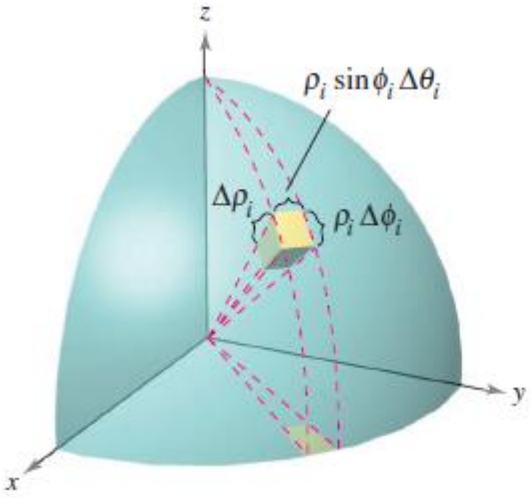
التحويل من الاحداثيات الاسطوانية إلى الكروية $(r \geq 0)$

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

نظام الاحداثيات الكروية ملائم لتمثيل السطوح في الفراغ التي لها نقطة أو مركز تناظر، على سبيل المثال، يبين الشكل التالي ثلاثة سطوح بمعادلات كروية بسيطة



في هذه الاحداثيات الكروية، أبسط منطقة صلبة هي صندوق كروي محدد ب $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ و $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ و $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ ، حيث $\rho \geq 0$ و $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ و $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$، كما يبينه الشكل أدناه



Spherical block: $\Delta V_i \approx \rho_i^2 \sin\phi_i \Delta\rho_i \Delta\phi_i \Delta\theta_i$

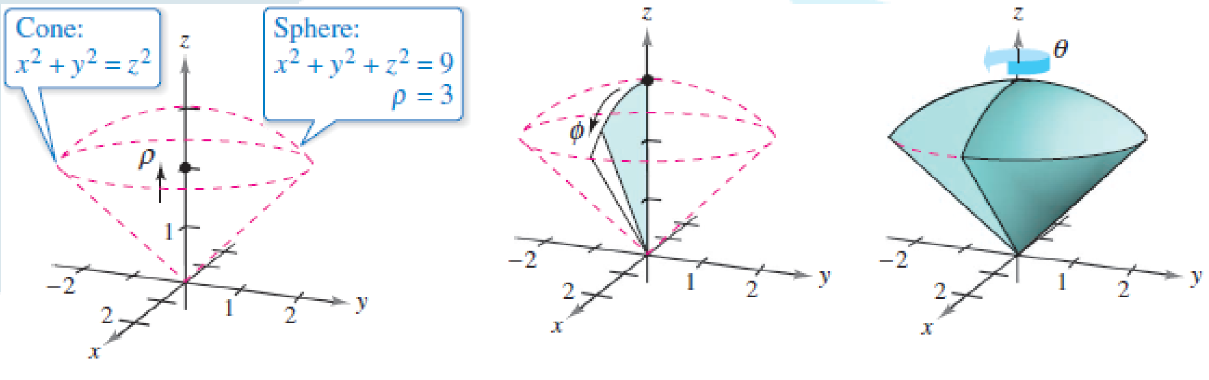
إذا كان التابع f مستمر على منطقة صلبة Q. يمكن كتابة التكامل الثلاثي ل f على Q بالاحداثيات الكروية كما يلي

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

ملاحظة: كما هو الحال بالنسبة للاحداثيات الاسطوانية، يمكن تغيير ترتيب المتحولات.

على سبيل المثال التكامل التالي $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$ ، يتم مسح المتحولات على النحو التالي

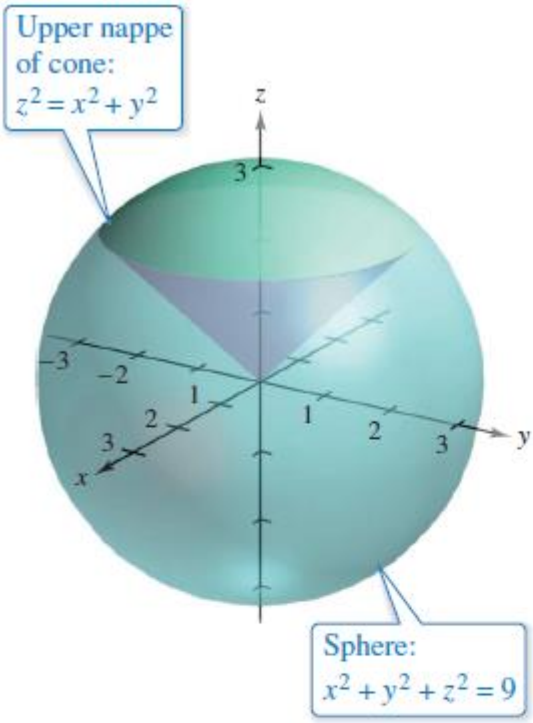


ρ varies from 0 to 3 with ϕ and θ held constant.

ϕ varies from 0 to $\pi/4$ with θ held constant.

θ varies from 0 to 2π.

مثال 20: احسب حجم المنطقة الصلبة Q المحددة من الأسفل بجزء المخروط العلوي $z^2 = x^2 + y^2$ ومن الأعلى بالكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.



الحل:

معادلة الكرة في الاحداثيات الكروية هي

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3$$

الكرة والمخروط يتقاطعان في

$2z^2 = 9 \Rightarrow z = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$، وبما أن $z = \rho\cos\phi$، بالتالي

$\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{4}$.

والحجم هو بالتالي

$$\iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 9 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$
$$= 9\int_0^{2\pi} -\cos\phi \Big]_0^{\pi/4} d\theta$$
$$= 9\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta$$
$$= 9\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$