المحاضرة الأولى: جملة المعادلات الخطية

التحليل الرياضي 2 – الهندسة المدنية

جامعة المنارة

2026-2025

مخطط الفصل الأول

1. جملة المعادلات الخطية
2. المصفوفات
3. محدد مصفوفة
4. القيم الذاتية والأشعة الذاتية

1.1 مقدمة لحل جملة المعادلات الخطية

1.2 طريقة غاوس وطريقة غاوس جوردن

1.1 مقدمة لحل جملة المعادلات الخطية:

معادلة خطية ب n متغير

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

أعداد حقيقية : $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$

الحد المسيطر : a_1

ملاحظة:

(1) المعادلات الخطية لا تحتوي على جداءات ولا جذور لمتغيرات ولا نسب مثلثية ولا توابع أسية أو لوغاريتمية.

(2) كل المتغيرات يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

- Ex 1: (معادلات خطية وغير خطية)

خطية $(a)\ 3x+2y=7$

$(b)\ \frac{1}{2}x+y-\pi z=\sqrt{2}$ خطية

خطية $(c)\ x_1-2x_2+10x_3+x_4=0$

$(d)\ (\sin\frac{\pi}{2})x_1-4x_2=e^2$ خطية

غير خطية $(e)\ xy+z=2$

جداء

أسي

$(f)\ e^x-2y=4$ غير خطية

NonLinear $(g)\ \sin x_1+2x_2-3x_3=0$

تابع مثلثي

$(h)\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ غير خطية

درجة المتغير ليست أولى

حل جملة معادلات خطية ب n متغير

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots,\ x_n = s_n$ بحيث: $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$

مجموعة الحلول: هي المجموعة التي تحتوي على كل حلول جملة المعادلات الخطية

مثال 2(التمثيل الوسيطي لمجموعة الحلول)

$x_1 + 2x_2 = 4$ (2, 1) حل, i.e. $x_1 = 2,\ x_2 = 1$

- $x_1 = 4 - 2x_2$
- $x_2 = t \Rightarrow x_1 = 4 - 2t$

وعليه مجموعة الحلول $\{(4-2t,\ t) \mid t \in R\}$ or $\{(s,\ 2-\tfrac{1}{2}s) \mid s \in R\}$

وبالشكل الشعاعي نكتب $(x_1, x_2) = (4, 0) + t(-2, 1) = (0, 2) + s(1, -\tfrac{1}{2})$

- a system of m linear equations in n variables:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Consistent متسقة :

نقول عن جملة المعادلات الخطية أنها متسقة إذا ملكت على الأقل حل.

- Inconsistent غير متسقة :

إذا لم تملك جملة المعادلات الخطية أي حل

▪ Notes ملاحظات :

كل جملة معادلات خطية إما أن تملك:

(1)حل وحيد بالضبط

(2) لا نهاية من الحلول

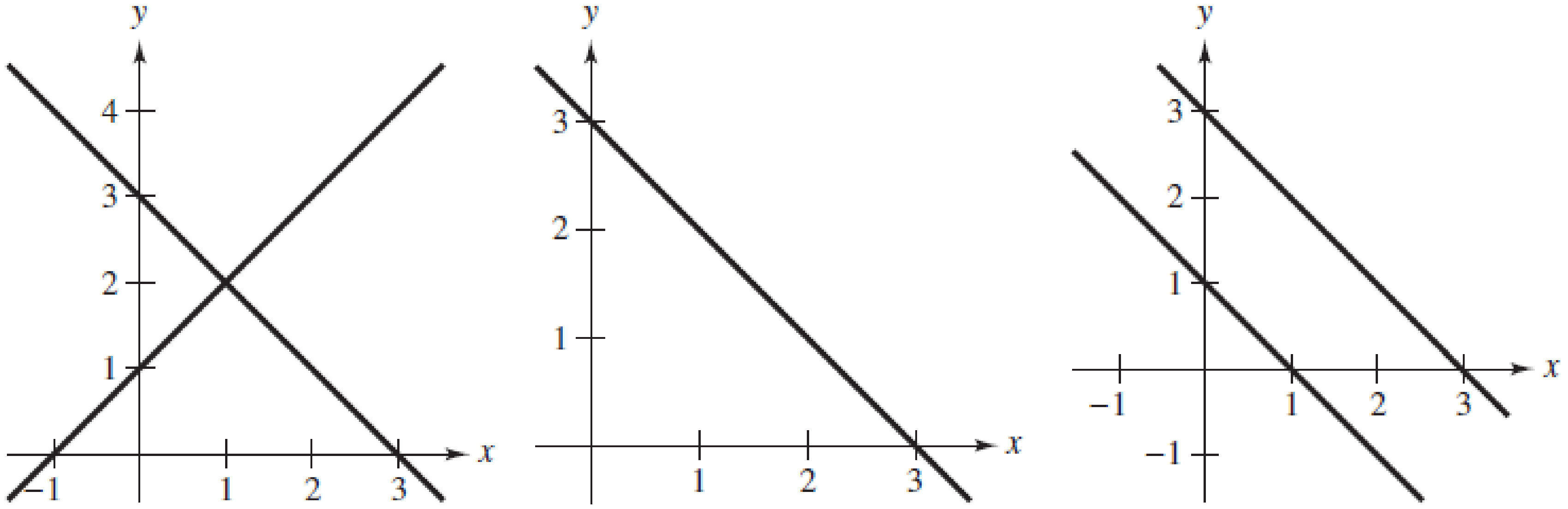
(3) لا تملك أية حل

- Ex 3: (حل جملة معادلات خطية)

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$
مستقيمين متقاطعين

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$
مستقيمين منطبقين

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$
مستقيمين متوازيين



exactly one solution

infinite number

no solution

- Ex 4: (استخدام الحل بالتعويض لحل جملة معادلات خطية)

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \qquad (1) \\ y &= -2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Sol: By substituting $y = -2$ into (1), you obtain

$$\begin{aligned} x - 2(-2) &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

لجملة المعادلات الخطية حل وحيد: $x = 1,\ y = -2$

- Ex 5:

$$
\begin{aligned}
x - 2y + 3z &= 9 \qquad (1)\\
y + 3z &= 5 \qquad (2)\\
z &= 2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Sol: Substitute $z=2$ into (2)

$$
\begin{aligned}
y + 3(2) &= 5\\
y &= -1
\end{aligned}
$$

and substitute $y=-1$ and $z=2$ into (1)

$$
\begin{aligned}
x - 2(-1) + 3(2) &= 9\\
x &= 1
\end{aligned}
$$

لجملة المعادلات الخطية حل وحيد : $x=1,\ y=-1,\ z=2$

- Equivalent التكافؤ :

نقول عن جملتي معادلات خطية أنهما متكافئتين إذا ملكتا بالضبط نفس مجموعة الحلول.

- Notes ملاحظات :

كل من العمليات التالية على جملة المعادلات الخطية ينتج جملة معادلات خطية مكافئة

1. التبديل بين معادلتين.
2. ضرب معادلة بعدد مختلف عن الصفر.
3. إضافة مضاعف أحد المعادلات إلى معادلة أخرى.

- Ex 6: Solve a system of linear equations (جملة متسقة)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

الحل:

$$(1)+(2) \rightarrow (2)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{c}\\(4)\\ \\ \end{array}$$

$$(1)\times(-2)+(3) \rightarrow (3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & -y & - & z & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{c}\\ \\(5)\end{array}$$

$$(4)+(5)\rightarrow(5)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array} \qquad (6)$$

$$(6)\times\frac{1}{2}\rightarrow(6)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}$$

ومنه يكون الحل: $x=1,\ y=-1,\ z=2$

- Ex 7: Solve a system of linear equations (جملة غير متسقة)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 & \quad (1) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 & \quad (2) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 & \quad (3) \end{array}$$

Sol: $(1)\times(-2)+(2)\rightarrow(2)$

$(1)\times(-1)+(3)\rightarrow(3)$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 & \\ & & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & \quad (4) \\ & & 5x_2 & - & 4x_3 & = & -2 & \quad (5) \end{array}$$

$$(4)\times(-1)+(5)\rightarrow(5)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & & & \boxed{0} & \boxed{=} & \boxed{-2} \end{array}$$

(a false statement)

وبالتالي الجملة لا تملك أية حل (an inconsistent system).

- Ex 8: Solve a system of linear equations (جملة تملك لا نهاية من الحلول)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & & x_2 & - & x_3 & = & 0 & (1)\\ x_1 & & & - & 3x_3 & = & -1 & (2)\\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 1 & (3)\end{array}$$

الحل:

$$(1) \leftrightarrow (2)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -1 & (1)\\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 & (2)\\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 1 & (3)\end{array}$$

$$(1)+(3) \rightarrow (3)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -1 & \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 & \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & (4)\end{array}$$

$$(2)\times(-3)+(4)\rightarrow(4)$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ \boxed{0 = 0} \end{aligned}$$

(محقق دوماً)

$$\Rightarrow x_2 = x_3, \quad x_1 = -1 + 3x_3$$

بوضع $x_3 = t,$ تكون مجموعة الحلول

$$\{(3t-1,\ t,\ t) | t \in R\}$$

ومنه جملة المعادلات الخطية تملك لا نهاية من الحلول

1.2 Gaussian Elimination and Gauss-Jordan Elimination

- $m \times n$ matrix:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & m \text{ سطر} \\ n \text{ عمود} & \end{array}$$

- Notes:

(1) Every entry a_{ij} in a matrix is a number.

(2) A matrix with <u>m rows</u> and <u>n columns</u> is said to be of size $m \times n$ مصفوفة من الحجم .

(3) If $m = n$, then the matrix is called مربعة من الدرجة n square of order n.

(4) For a square matrix في المصفوفات المربعة , $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ عناصر القطر الرئيسي .

- Ex 1: Matrix المصفوفة الحجم Size

Matrix المصفوفة	الحجم Size
$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$	1×1
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	2×2
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	1×4
$\begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & \sqrt{2} \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$	3×2

- a system of m equations in n variables:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrix form: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Augmented matrix المصفوفة الموسعة :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [A \mid \boldsymbol{b}]$$

- Coefficient matrix مصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

- Elementary row operation العمليات الأولية على الأسطر :

(1) Interchange two rows تبديل سطرين . $r_{ij}: R_i \leftrightarrow R_j$

(2) Multiply a row by a nonzero constant ضرب سطر بعدد غير صفري $r_i^{(k)}: (k)R_i \to R_i$

(3) Add a multiple of a row to another row إضافة مضاعف سطر لسطر آخر. $r_{ij}^{(k)}: (k)R_i + R_j \to R_j$

- Row equivalent التكافؤ السطري :

نقول عن مصفوفتين أنهما متكافئتين سطرياً إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بعمليات أولية على الأسطر.

- Ex 2: (Elementary row operation العمليات الأولية على الأسطر)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1^{(\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{13}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

- Ex 3: Using elementary row operations to solve a system

جملة المعادلات الخطية	المصفوفة الموسعة	العمليات الأولية على الأسطر
$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$	
$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$	$r_{12}^{(1)}: (1)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$r_{13}^{(-2)}: (-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

Linear System	Associated Augmented Matrix	Elementary Row Operation
$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$r_{23}^{(1)}: (1)R_2 + R_3 \to R_3$
$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$r_3^{(\frac{1}{2})}: (\frac{1}{2})R_3 \to R_3$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

- Ex 4: (Row-echelon form or reduced row-echelon form الشكل الدرجي لمصفوفة)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ reduced row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ reduced row-echelon form

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

- Ex 5: حل جملة معادلات خطية باستخدام طريقة غاوس جوردن (one solution حل وحيد)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

Sol:

augmented matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{(1)},\ r_{13}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{23}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3^{(\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{31}^{(-3)},\ r_{32}^{(-3)},\ r_{21}^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 2 \end{array}$$

- Ex 7: Solve a system by G.J. elimination method (infinitely many solutions)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Sol:

المصفوفة الموسعة

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1^{(\frac{1}{2})},\ r_{12}^{(-3)},\ r_2^{(-1)},\ r_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{aligned} x_1 \qquad + 5x_3 &= 2 \\ x_2 \quad - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$x_1,\ x_2$

العنصر الحر x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 5x_3 \\ x_2 &= -1 + 3x_3 \end{aligned}$$

لنضع $x_3 = t$, تكون مجموعة الحلول:

$$\{(2 - 5t, -1 + 3t, t) | t \in R\}$$

وبالتالي جملة المعادلات الخطية تملك لا نهاية من الحلول

- Ex 8: Solve a system by Gauss-Jordan elimination method (no solution)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Sol:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{(-1)},\ r_{13}^{(-2)},\ r_{14}^{(-3)},\ r_{23}^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ \longrightarrow \qquad 0 &= -2 \\ 5x_2 - 7x_3 &= -11 \end{aligned}$$

كون المعادلة الثالثة مستحيلة، جملة المعادلات الخطية لا تملك حل.

- Homogeneous systems of linear equations جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

نقول عن الجملة أنها متجانسة إذا كانت الثوابت معدومة

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
 & \vdots & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

- Trivial solution الحل البديهي : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
- Nontrivial solution: other solutions

- Notes:

(1) كل جملة معادلات خطية متسقة.

(2) إذا كان عدد معادلات جملة متسقة أقل من عدد المتغيرات عندئذ لجملة المعادلات الخطية لا نهاية من الحلول.

- Ex 9: Solve the following homogeneous system

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Sol:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_{12}^{(-2)},\ r_2^{(-\frac{1}{3})},\ r_{21}^{(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rcrcl} x_1 & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$x_1,\ x_2$ letting $x_3 = t$, then the solutions are:

free variable: x_3 $\{(-2t, -t, t) | t \in R\}$

When $t = 0,\ x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (trivial solution)