المحاضرة الثانية: المصفوفات الجزء I

تحليل رياضي 2

جامعة المنارة

2025-2026

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

Operations with Matrices خواص المصفوفات

Properties of Matrix Operations خواص العمليات على المصفوفات

The Inverse of a Matrix مقلوب مصفوفة

Elementary Matrices المصفوفات الأولية

Complex Matrices المصفوفات العقدية

Operations with Matrices العمليات على المصفوفات

- **Matrix المصفوفة :**

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\in M_{m\times n}(K)$$

K: المجموعة العددية $(R \text{ or } C)$ $M_{m\times n}(R)$: المصفوفات الحقيقية $M_{m\times n}(C)$: المصفوفات العقدية

(i, j)–العنصر: a_{ij} السطر: m العمود: n الحجم: $m\times n$

- ***i*-th row vector**

$r_i=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ row matrix مصفوفة سطرية

- *j*-th column vector

$$c_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}$$ مصفوفة عمود

- Square matrix المصفوفة المربعة : $m = n$

- Diagonal matrix:المصفوفة القطرية

$$A = \mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(K)$$

- Trace الأثر :

If $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ Then $Tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

- Ex 1:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\end{bmatrix}\Rightarrow r_1=\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix},\quad r_2=\begin{bmatrix}4&5&6\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\Rightarrow c_1=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},\quad c_2=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix},\quad c_3=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

- Complex matrices المصفوفة العقدية

$$\begin{bmatrix}1&-1&i\\3&2i&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&i&-i&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}i\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1+i&1\\i&1-i\end{bmatrix}$$

- Equal matrix تساوي المصفوفات :

If $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ عندئذ $A=B$ إذا وفقط إذا $a_{ij}=b_{ij}\ \forall\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$

- Ex 2: (Equal matrix)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

If $A=B$ Then $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$

- Matrix addition جمع المصفوفات :

If $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ Then $A+B=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

- Ex 3: (Matrix addition جمع المصفوفات)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -3+3 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Scalar multiplication: ضرب مصفوفة بعدد

If $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, c: scalar عدد$(\in K)$ Then $cA = \left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$

- Matrix subtraction:طرح المصفوفات

$$A - B = A + (-1)B$$

- Ex 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Find أوجد $(a)\ 3A,\ (b)\ -B,\ (c)\ 3A - B$

الحل:

(a)

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

(b)

$$-B = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$3A-B=\begin{bmatrix}3 & 6 & 12\\ -9 & 0 & -3\\ 6 & 3 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6 & 12\\ -10 & 4 & -6\\ 7 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

- **Matrix multiplication ضرب المصفوفات :**

إذا $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$, $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ عندئذ $AB=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\left[b_{ij}\right]_{n\times p}=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}$

حجم Ab

حيث $$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

- ملاحظات: (1) $A+B=B+A$, (2) $AB \neq BA$
- Ex 5: (AB أوجد-)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol: $$AB = \begin{bmatrix} (-1)(-3)+(3)(-4) & (-1)(2)+(3)(1) \\ (4)(-3)+(-2)(-4) & (4)(2)+(-2)(1) \\ (5)(-3)+(0)(-4) & (5)(2)+(0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

- Matrix form of a system of linear equations صيغة المصفوفات لجملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m معادلة خطية

$$\Downarrow$$

$$\underset{A}{\underset{||}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}} \underset{\boldsymbol{x}}{\underset{||}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}} = \underset{\boldsymbol{b}}{\underset{||}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mxn nx1 mx1

Properties of Matrix Operations خواص العمليات على المصفوفات

- Three basic matrix operators: العمليات الأساسية على المصفوفات

  (1) matrix addition جمع المصفوفات

  (2) scalar multiplication ضرب مصفوفة بعدد

  (3) matrix multiplication ضرب المصفوفات

- Zero matrix المصفوفة الصفرية: $O_{m\times n}$
- Identity matrix of order n المصفوفة الواحدية: I_n
- Properties of matrix addition and scalar multiplication:

If $A,\ B,\ C \in M_{m\times n}(K)$ then

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $(cd)A = c(dA)$

(4) $1A = A$

(5) $c(A + B) = cA + cB$

(6) $(c + d)A = cA + dA$

- Properties of zero matrices خواص المصفوفة الصفرية :

If $A \in M_{m\times n}(K)$, c: scalar then

(1) $A+O_{m\times n}=A$

(2) $A+(-A)=O_{m\times n}$

(3) $cA=O_{m\times n} \Rightarrow c=0$ or $A=O_{m\times n}$

- Notes:

(1) $O_{m\times n}$: $m\times n$ حيادي المصفوفات من الحجم

(2) $-A$: A معكوس الجمع للمصفوفة

- **Properties of matrix multiplication خواص ضرب المصفوفة بعدد:**

$$(1)\ A(BC)=(AB)C$$

$$(2)\ A(B+C)=AB+AC$$

$$(3)\ (A+B)C=AC+BC$$

$$(4)\ c(AB)=(cA)B=A(cB)$$

- **Properties of identity matrix خواص المصفوفة الواحدية:**

If $A\in M_{m\times n}(K)$, then

$$(1)\ AI_n=A$$

$$(2)\ I_mA=A$$

- Transpose of a matrix منقول مصفوفة :

$$\text{If } A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(K)$$

$$\text{Then } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{n\times m}(K)$$

- Ex 1: (أوجد منقول المصفوفة في كل من الحالات التالية)

$$(a)\quad A=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}\qquad (b)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\qquad (c)\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\2&4\\1&-1\end{bmatrix}$$

Sol:

$$(a)\quad A=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}2&8\end{bmatrix}$$

$$(b)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$$

$$(c)\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\2&4\\1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&4&-1\end{bmatrix}$$

- Properties of transposes خواص منقول مصفوفة:

$$(1)\ \ (A^T)^T = A$$

$$(2)\ \ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(3)\ \ (cA)^T = c(A^T)$$

$$(4)\ \ (AB)^T = B^T A^T$$

- Symmetric matrix المصفوفة المتناظرة :

A square matrix A is symmetric if $A^T = A$

- Skew-symmetric matrix :

A square matrix A is skew-symmetric if $A^T = -A$

- Ex 2:

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}$ إذا علمت أن المصفوفة متناظرة أوجد قيم الثوابت a, b, c

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 4 & c \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = A^T \Rightarrow a = 2,\ b = 3,\ c = 5$$

- Ex 3:

If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ is a skew-symmetric, find a, b, c?

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\a&0&3\\b&c&0\end{bmatrix},\qquad -A^T=\begin{bmatrix}0&-a&-b\\-1&0&-c\\-2&-3&0\end{bmatrix}$$

$$A=-A^T \Rightarrow a=-1,\ b=-2,\ c=-3$$

- Note: AA^T is symmetric
- Real (Complex) number: $ab=ba$ (بالنسبة للأعداد الضرب تبديلي)
- Matrix ضرب المصفوفات ليس تبديلي :

$$\underset{m\times n}{A}\underset{n\times p}{B} \neq BA$$

- Ex 4:

تحقق أن المصفوفتين BA و AB غير متساويتين.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Sol:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 4 & -4\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

- Note: $AB \neq BA$

- Matrix:

$AC = BC, \quad C \neq O$

(1) $A = B$ عندئذ (غير شاذة) إذا كانت المصفوفة قابلة للقلب

(2) If C شاذة, then $A \neq B$

- Ex 5: (مثال عن حالة الاختصار غير ممكنة)

Show that $AC = BC$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix} \qquad BC=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

So $AC=BC$ but $A\neq B$

The Inverse of a Matrix مقلوب مصفوفة

- Inverse matrix:

Consider $A\in M_{n\times n}(K)$

If there exists a matrix $B\in M_{n\times n}(K)$ such that $AB=BA=I_n$,

Then (1) A is invertible قابلة للقلب (or nonsingular غير شاذة)

(2) B is the inverse مقلوب of A The inverse of A is denoted by A^{-1} $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

- إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام طريقة غاوس جوردن

$$\left[A \mid I\right] \longrightarrow \left[I \mid A^{-1}\right]$$ Gauss-Jordan Elimination

- Ex 1: (أوجد مقلوب المصفوفة)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A \qquad I}{\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]} \xrightarrow{r_{12}^{(1)},\ r_{21}^{(-4)}} \underset{I \qquad A^{-1}}{\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}$$

- Ex 2: (Find the inverse of the following matrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol: $$\left[A \;\vdots\; I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{12}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{13}^{(6)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{23}^{(4)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{3}^{(-1)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_{32}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_{21}^{(1)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

So the matrix A is invertible, and its inverse is

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

- Check: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

- Power of a square matrix قوى مصفوفة مربعة:

$$(1)\ A^0 = I$$

$$(2)\ A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ factors}} \qquad (k > 0)$$

$$(3)\ A^r \cdot A^s = A^{r+s} \qquad r, s\text{: integers}$$

$$(4)\ (A^r)^s = A^{rs}$$

$$(5)\ D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

- Theorem (خواص مقلوب مصفوفة):

If A is an invertible matrix, k is a positive integer, and c is a scalar not equal to zero, then

(1) A^{-1} is invertible and $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) A^{k} is invertible and $(A^{k})^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k\text{ factors}} = (A^{-1})^{k} = A^{-k}$

(3) cA is invertible and $(cA)^{-1} = \dfrac{1}{c}A^{-1},\ c \neq 0$

(4) A^{T} is invertible and $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

- Theorem (The inverse of a product مقلوب جداء):

If A and B are invertible matrices مصفوفتان غير شاذتان of size n, then AB is invertible and

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- Note: تعميم

$$(A_1A_2A_3\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

- Theorem 2.5 (Systems of equations with unique solutions):

إذا كانت A مصفوفة مربعة عندئذ لجملة المعادلات الخطية $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ حل وحيد يعطى بالشكل $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

- Ex 3: Use an inverse matrix to solve each system

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$$

Sol:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan Elimination}} A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(a)\quad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Elementary Matrices المصفوفات الأولية

- نقول عن المصفوفة $n\times n$ أنها أولية إذا حصلنا عليها بالقيام بعملية أولية واحدة فقط على المصفوفة الواحدية
- Three row elementary matrices:

$$(1)\ R_{ij}=r_{ij}(I)$$
تبديل سطرين.

$$(2)\ R_i^{(k)}=r_i^{(k)}(I)\qquad (k\neq 0)$$
ضرب سطر بعدد مختلف عن الصفر.

$$(3)\ R_{ij}^{(k)}=r_{ij}^{(k)}(I)$$
إضافة مضاعف سطر إلى سطر آخر.

- Ex 1: (حدد فيما إذا كانت المصفوفات التالية أولية أو لا)

$$(a)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(a) Yes $(r_2^{(3)}(I_3))$

(b) No (not square)

(c) No (Row multiplication must be by a nonzero constant)

$$(d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Yes $(r_{23}(I_3))$ Yes $(r_{12}^{(2)}(I_2))$ No (Use two elementary row operations)

Complex Matrices المصفوفات العقدية

- **Conjugate of a matrix:**

$$A \in M_{m\times n}(C) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in M_{m\times n}(C) = \left[\overline{a_{ij}}\right]_{m\times n}$$

- **Ex 1:** $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$

- **Properties of the conjugate of a matrix خواص مرافق مصفوفة:**

(1) $\overline{\overline{A}} = A$ (2) $\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}$ (3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

(4) $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}, \quad c \in C$ (5) $(\overline{A})^T = \overline{A^T}$

(6) If A is invertible غير شاذة , then $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$

- Conjugate transpose of a matrix مرافق منقول مصفوفة :

$$A \in M_{m\times n}(C) \quad \Rightarrow \quad A^* = \overline{A^T} \in M_{n\times m}(C)$$

- Ex 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = \overline{A^T} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

- Properties of the conjugate transpose خواص منقول مرافق مصفوفة:

(1) $(A^*)^* = A$

(2) $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$

(3) $(AB)^* = B^* A^*$

(4) $(cA)^* = \bar{c} A^*, \quad c \in C$