المحاضرة الرابعة عملي: القيم الذاتية والأشعة الذاتية

تحليل رياضي 2

جامعة المنارة

2026-2025

تحقق في كل مما يلي أن λ_i قيمة ذاتية للمصفوفة A وأن x_i الشعاع الذاتي الموافق

1. $$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \boldsymbol{x}_1 = (1,0) \\ \lambda_2 = -2, \boldsymbol{x}_2 = (0,1) \end{matrix}$$

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

$$A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

2. $$A=\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \boldsymbol{x}_1 = (1,1) \\ \lambda_2 = 2, \boldsymbol{x}_2 = (5,2) \end{matrix}$$

جَامعة
المَنارة
MANARA UNIVERSITY

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

$$A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 5, \boldsymbol{x}_1 = (1,2,-1) \\ \lambda_2 &= -3, \boldsymbol{x}_2 = (-2,1,0) \\ \lambda_3 &= -3, \boldsymbol{x}_3 = (3,0,1) \end{aligned}$$

$$A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 x_2$$

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_3 x_3$$

تحقق فيما إذا كان x شعاع ذاتي للمصفوفة A

1 $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$(a)\ \boldsymbol{x} = (1, 2)$

$(b)\ \boldsymbol{x} = (2, 1)$

$(c)\ \boldsymbol{x} = (1, -2)$

$(d)\ \boldsymbol{x} = (-1, 0)$

$$(a)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}7&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$ **ليس شعاع ذاتي**

$$(b)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}7&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\8\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية *8*

$$(c)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}7&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية *3*

$$(d)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}7&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$ ليس شعاع ذاتي

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

2

$(a)\ \boldsymbol{x}=(2,-4,6)$
$(b)\ \boldsymbol{x}=(2,0,6)$
$(c)\ \boldsymbol{x}=(2,2,0)$
$(d)\ \boldsymbol{x}=(-1,0,1)$

$$(a)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -16\\ 24\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 6\end{bmatrix}$$

شعاع ذاتي مع قيمة ذاتية 4

$$(b)\ A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -16\\ 12\end{bmatrix}\lambda\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 6\end{bmatrix}$$

لا يمثل شعاع ذاتي

$$(c)\ A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ is an eigenvector of A (with a corresponding eigenvalue –2)

$$(d)\ A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ is an eigenvector of A (with a corresponding eigenvalue –2)

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة في كل من الحالات التالية:

1 $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$(a)\ |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda-7) = 0$$

$$(b)\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 7$$

$$\lambda_1 = 0,\quad \begin{bmatrix} \lambda_1-6 & 3 \\ 2 & \lambda_1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 2t): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = 0$ is (1, 2)

$$\lambda_1 = 7, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 - 6 & 3 \\ 2 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(-3t, t): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 7$ is (–3, 1)

2 $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a)\ |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$(b)\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 = 2,\quad \begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_1 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 0, 0): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = 2$ is (1, 0, 0)

$$\lambda_2 = 3,\quad \begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_2 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(0, t, 0): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 3$ is (0,1,0)

$$\lambda_3 = 1, \quad \begin{bmatrix} \lambda_3 - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda_3 - 3 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$S = \{(-t, -2t, t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_3 = 1$ is $(-1, -2, 1)$

3 $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(a)\ |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 3)^2 = 0$$

$(b)\ \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3$ (repeated)

$$\lambda_1=-3,\quad \begin{bmatrix} \lambda_1-1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda_1-5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda_1+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, t, 3t): t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = -3$ is (1, 1, 3)

$$\lambda_2=3,\quad \begin{bmatrix} \lambda_2-1 & -2 & 2 \\ 2 & \lambda_2-5 & 2 \\ 6 & -6 & \lambda_2+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(s-t, s, t): s, t \in R\}$. So, two eigenvectors corresponding to $\lambda_2 = 3$ are (1,1,0) and (1, 0, –1)

Let $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

(a)A أوجد القيم الذاتية للمصفوفة

(b) A أوجد الأشعة الذاتية للمصفوفة

(c) تحقق فيما إذا كانت المصفوفةA قابلة للتقطير

(d) احسب A^7

$$(a)\ \ |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -4 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=5$$

$$(b)\ \lambda_1=-1,\quad \begin{bmatrix}\lambda_1-1 & -2\\ -4 & \lambda_1-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$S = \{(t, -t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_1 = -1$ is $(1, -1)$

$$\lambda_2 = 5, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 \\ -4 & \lambda_2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution is $\{(t, 2t) : t \in R\}$. So, an eigenvector corresponding to $\lambda_2 = 5$ is $(1, 2)$

$$(c)\ P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$(d)\ A=PDP^{-1}\Rightarrow A^{7}=PD^{7}P^{-1}$$

$$A^{7}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{7} & 0\\ 0 & 5^{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26041 & 26042\\ 52084 & 52083\end{bmatrix}$$

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة في كل من الحالات التالية

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق فيما إذا كانت المصفوفة قابلة للتقطير في كل من الحالات التالية

① $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

② $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

③ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

④ $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$