المجموعات العدديّة

مقدّمة في المجموعات العدديّة:

ظهرت الأرقام في وقت مبكر جدّاً من تاريخ البشريّة؛ إذ تمّ اختراع الحساب قبل الكتابة (بـ20000 ألف عام أو 35000 ألف عام وربّما أكثر). كانت عمليّات الحساب تتمّ باستخدام الحصى لحساب القيم الصّحيحة الموجبة.

هذه القيم تسمح بحلّ معادلات بسيطة من الشّكل $x + 3 = 5$ مجموعة هذه القيم تمّ ترميزها $\mathbb{N}$ عام 1888 من قبل العالم Dedekind Richard.

(1-1) مجموعة الأعداد الطّبيعيّة:

تعريف 1 :

تسمّى الأعداد التي نستخدمها لعدّ الأشياء، عدد أفراد أسرة، عدد طلّاب صفّ، بالأعداد الطّبيعيّة، ويرمز لها $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7 \dots \dots ..\}$$

ملاحظة : تعتبر بعض المراجع أنّ مجموعة الأعداد الطّبيعيّة تبدأ من الصّفر.

(2-1) مجموعة الأعداد الكلّيّة :

تعريف 2:

مجموعة الأعداد الكلّيّة بالتّعريف هي مجموعة الأعداد الطّبيعيّة مضافاً إليها الصّفر، ونرمز لها

$$\mathbb{W} = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(3-1) مجموعة الأعداد الصّحيحة :

تبيّن لاحقاً أنّ الأعداد الطّبيعيّة لا تمكّننا من حلّ معادلات من الشّكل

$x + 5 = 3$, وبذلك كان من الضّروري توسيع مجموعة الأعداد الطّبيعيّة الّتي ندعوها مجموعة الأعداد الصّحيحة, تمّ ترميز هذه المجموعة بـ $\mathbb{Z}$ (بناءً على الحرف الأوّل من كلمة zahlen الّتي تعني بالألمانيّة عدداً).

تعريف 3 :

تشمل مجموعة الأعداد الصّحيحة الأعداد الطّبيعيّة إضافة إلى الصّفر والأعداد السّالبة, ويرمز لها بـ $\mathbb{Z}$, وتعطى كالآتي :

$$\mathbb{Z} = \{\dots\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots\}$$

يرمز لمجموعة الأعداد الصّحيحة ما عدا الصّفر بالرّمز $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

تحتوي مجموعة الأعداد الصّحيحة على العديد من المجموعات الجزئيّة الشّهيرة مثل الأعداد الصّحيحة الزّوجيّة والفرديّة والموجبة $\mathbb{Z}^+$ والسّالبة $\mathbb{Z}^-$.

(1-4) مجموعة الأعداد العاديّة (النّسبيّة) :

قد نحتاج إلى حلّ معادلات من الشّكل $x \times 3 = 5$. قد لا نجد حلول مثل هذه المعادلات ضمن المجموعة$\mathbb{Z}$ ؛ وبذلك يجب علينا توسيع مجموعة الأعداد الصّحيحة. تزوّدنا مجموعة الأعداد العاديّة بحلول هذا النّمط من المعادلات، وقد تمّ ترميزها بـ $\mathbb{Q}$ من قبل العالم Peano في عام 1895 (بناءً على الحرف الأوّل من كلمة quoziente الّتي تعني بالإيطاليّة نسبة).

تعريف 4 :

تعرف مجموعة الأعداد العاديّة بالشّكل :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

مبرهنة 1 : يكون العدد عاديّاً إذا وفقط إذا كتب على شكل عدد عشريّ منتهٍ أو دوريّ.

مثال : $\frac{3}{5} = 0.6, \quad \frac{1}{3} = 0.33333\dots\dots \quad 1.179\underbrace{325}\ \underbrace{325}\ \underbrace{325}\dots\dots$

لن نعطي برهاناً للمبرهنة, ولكن الاتّجاه الأوّل من المبرهنة ينتج مباشرةً من القسمة الإقليديّة. بالنّسبة إلى الاتّجاه الآخر سنحاول توضيحه من خلال المثال الآتي : سنبين أنّ العدد الآتي $x = 12.34\underbrace{2021}\,\underbrace{2021}\dots\dots$ عدد عادي.

سنقوم بجعل الجزء الدّوريّ مباشرةً بعد الفاصلة، وذلك بالضّرب بـ 100

$$100x = 1234.\underbrace{2021}\,\underbrace{2021}\dots\dots \qquad (1)$$

الآن نضرب بـ 10000, فنحصل على المعادلة الآتية :

$$10000 \times 100\,x = 12342021.\underbrace{2021}\,\underbrace{2021}\dots\dots \qquad (2)$$

نلاحظ في المعادلتين (1)-(2) أنّ الجزء الموجود بعد الفاصلة دوريّ، نطرح (1) من (2) :

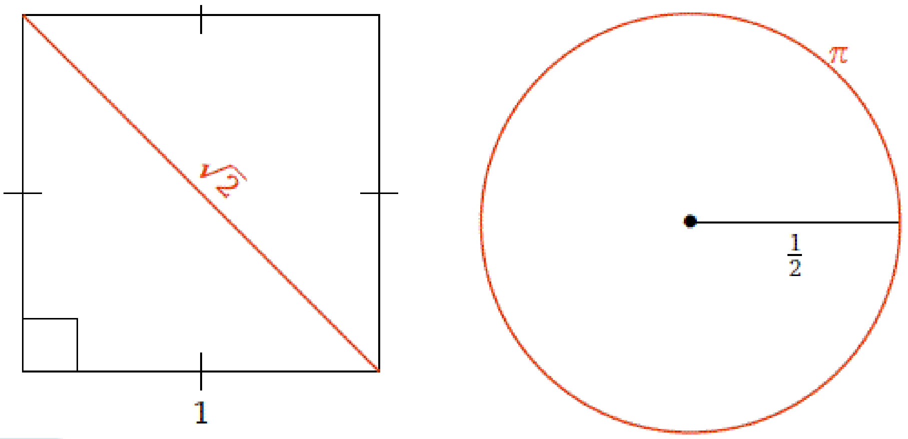
$$999\,900\,x = 12340787$$

وعليه $x = \frac{12340787}{999\,900}$ ومنه $x \in \mathbb{Q}$

(1-5) الأعداد غير العاديّة :

تظهر الأعداد غير العاديّة عادةً في الأشكال الهندسيّة: مثلاً قطر مربع ضلعه يساوي واحداً هو العدد $\sqrt{2}$ غير العادي, محيط دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}$

كذلك غير عادي, كذلك الأمر بالنّسبة إلى العدد النيبري $\exp(1) = e$



الشّكل (1) : ظهور الأعداد غير العاديّة في الأشكال الهندسيّة

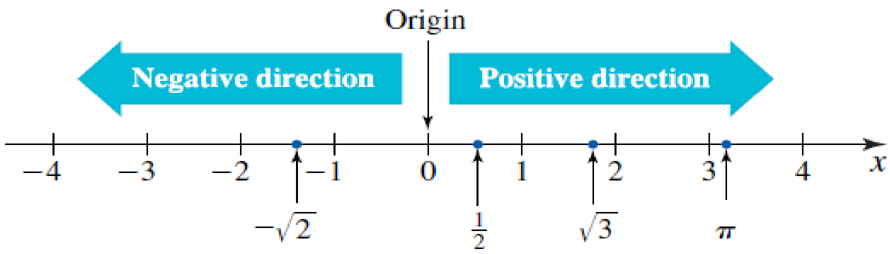
سوف نبرهن أنّ $\sqrt{2}$ عدد غير نسبيّ من خلال المبرهنة الآتية :

مبرهنة 2 : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

البرهان : لنفرض جدلاً أنّ العدد $\sqrt{2}$ غير نسبيّ, لذلك يوجد العددان الصّحيحان $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{Z}^*$ بحيث $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, سنفترض أنّ العددين الصّحيحين q و p عددان أوّليّان فيما بينهما؛ أي أنّ الكسر $\frac{p}{q}$ غير قابل للاختزال, بتربيع طرفي المعادلة $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ نحصل على $p^2 = 2q^2$, نلاحظ أنّ طرفي المعادلة عددان صحيحان, وأنّ الطّرف الأيسر زوجيّ, وعليه يكون الطّرف الأيمن زوجيّ؛ أي أنّه قابل للقسمة على 2. بما أنّ p^2 يقبل القسمة على 2, فهذا يسري على p (يمكن برهان ذلك ببساطة عن طريق نقض الفرض), وعليه يوجد $\acute{p} \in \mathbb{Z}$ بحيث $p = 2p'$. بالعودة إلى المعادلة $p^2 = 2q^2$، وبتعويض $2p'$ بدلاً من p, نحصل على $2q^2 = 4p'^2$ ومنه $q^2 = 2p'^2$. يؤدي هذا إلى أنّ q^2 زوجيّ كذلك 2 تقسم q. ومنه 2 تقسم q و p في آنٍ معاً. وبهذا نكون قد حصلنا على تناقض مع فرضنا الأساسيّ أنّ p و q أوّليّان فيما بينهما، وبذلك يكون فرضنا خاطئاً، وعكسه هو الصّحيح؛ أي أنّ $\sqrt{2}$ عدد غير عاديّ. ■

(6-1) مجموعة الأعداد الحقيقيّة :

أطلق René Descartes عام 1637 اسم مجموعة الأعداد الحقيقيّة على المجموعة الّتي تحوي كافة الأعداد العاديّة وغير العاديّة، ورمز لها George Cantor بالرّمز $\mathbb{R}$, غالباً ما تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقيّة على مستقيم الأعداد الحقيقيّة بالشّكل :



الشّكل (2) : مستقيم الأعداد الحقيقيّة

من الجيّد أن نعلم أن : $\sqrt{2} \approx 1.4142$; $\pi \approx 3.14159265$

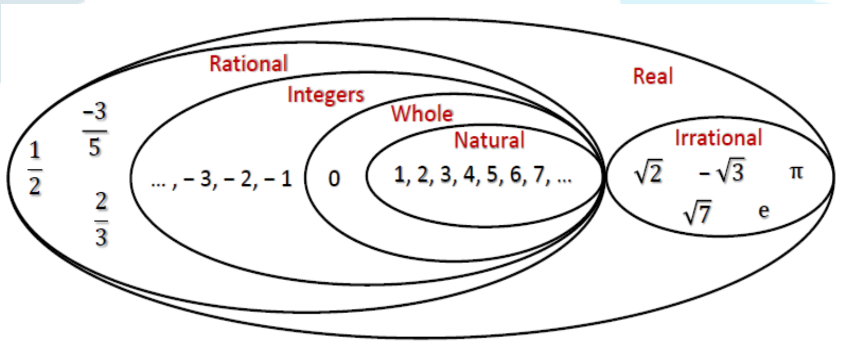
$e \approx 2.718..$

تعريف 5 :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

ملاحظة : كلّ عدد عاديّ هو عدد حقيقيّ, وعليه يقال إنّ المجموعة

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ وترتبط المجموعات العدديّة مع بعضها بعلاقات احتواء نوضحها في الشّكل الآتي :



الشّكل (3) : المجموعات العدديّة

تعريف 6 :

الأعداد الموجبة $\mathbb{R}_+^*$: هي الأعداد الواقعة على يمين مستقيم الأعداد, ويقال عن العدد $x \in \mathbb{R}$ إنّه موجب تماماً إذا كان $x > 0$.

تعريف 7 :

الأعداد غير السّالبة $\mathbb{R}_+$: $\forall x \in \mathbb{R}\,; x \geq 0$.

تعريف 8 :

الأعداد السّالبة $\mathbb{R}_-^*$: هي الأعداد الواقعة على يسار مستقيم الأعداد, ويقال عن العدد $x \in \mathbb{R}$ إنّه سالب تماماً إذا كان $x < 0$.

تعريف 9 :

الأعداد غير الموجبة $\mathbb{R}_-$: $\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 0$.

خواص مجموعة الأعداد الحقيقيّة :

الجمع والضّرب :

من أجل كلّ $a, b, c \in \mathbb{R}$, الخواص الآتية محقّقة :

التّبديليّة :

5. $a \times b = b \times a$ 1. $a + b = b + a$

الحياديّة :

6. $1 \times a = a; a \neq 0$ 2. $0 + a = a$

النّظير :

7. $a \times b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$ 3. $a + b = 0 \;\Leftrightarrow a = -b$

التّجميعيّة :

8. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ 4. $(a + b) + c = a + (b + c)$

التّوزيعيّة :

9. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

10. $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0, or\ b = 0)$

ملاحظة :

1. تحت الخواص من 1 إلى 4، تمثّل الثّنائيّة $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبديليّة.

2. تحت الخواص من 5 إلى 8، تمثّل الثّنائيّة $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ زمرة تبديليّة.

3. تحت الخواص من 1 إلى 8، تمثّل الثّلاثيّة $(\mathbb{R},+,\times)$ حقلاً.

المتراجحات والتّرتيب :

إنّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة مجموعة مرتّبة, ويقصد بالتّرتيب : أنّه مهما كان العددان الحقيقان a و b , فإنّ أحدهما أكبر من الآخر ($a > b$, وتُقرأ a أكبر من b أو العدد b أصغر من العدد a).

خصائص علاقة التّرتيب ومميزاتها :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$.
2. من أجل أيّ عددين حقيقيّين $x, y \in \mathbb{R}$, إذا كان $y \geq x$ و $x \geq y$, عندئذٍ $x = y$.
3. من أجل $x, y, z \in \mathbb{R}$, إذا كان $x \leq y$ وكان $y \leq z$, عندئذٍ $x \leq z$.

ملاحظة :

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y);\quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

ملاحظة :

من أجل أيّ ثنائيّة $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ لدينا بالتّعريف :

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$$

$\mathbb{R}_+$: تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقيّة غير السّالبة

$$x < y \Leftrightarrow \left(x \leq y \text{ و } x \neq y\right)$$

العمليّات على $\mathbb{R}$ متوافقة مع علاقة التّرتيب $(\leq)$ بالمفهوم الآتي : من أجل الأعداد الحقيقيّة الآتية $a, b, c \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$(a \leq b \;\; and \; c \leq d) \Longrightarrow a + c \leq b + d$$

$$(a \leq b \; and \; c \geq 0) \Longrightarrow a \times c \leq b \times c$$

$$(a \leq b \; and \; c \leq 0) \Longrightarrow a \times c \geq b \times c$$

نعرّف القيمة العظمى لعددين حقيقيّين a, b بالشّكل الآتي :

$$max(a, b) = \begin{cases} a & ; \; if \; a \geq b \\ b & ; \; if \; b > a \end{cases}$$

(7-1) خاصّة أرخميدس :

مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ تحقّق **خاصّة أرخميدس**, هذا يعني :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \; ; n > x$$

(من أجل أيّ عدد حقيقيّ x، يوجد عدد طبيعيّ n أكبر تماماً من x)

مبرهنة 3 : (تابع الجزء الصّحيح)

ليكن $x \in \mathbb{R}$, يوجد عدد صحيح وحيد, يُدعى الجزء الصّحيح للعدد x، ويُرمز له $E(x)$، ويحقّق :

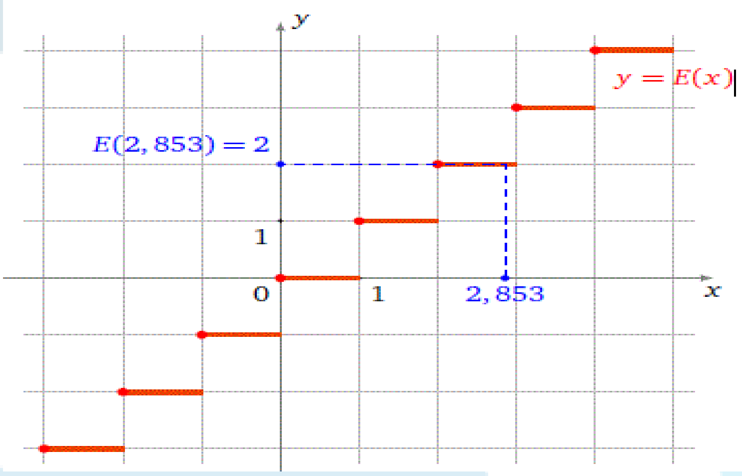
$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

مثال : $E(2.853) = 2, \quad E(\pi) = 3, \quad E(-3.5) = -4$

$$E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 4$$

ملاحظة :

- يرمز كذلك للجزء الصّحيح كما يلي : $E(x) = [x]$.
- نبيّن في الشّكل المرفق بيان تابع الجزء الصّحيح $x \longmapsto E(x)$:



الشّكل (4) : تابع الجزء الصّحيح

(8-1) القيمة المطلقة :

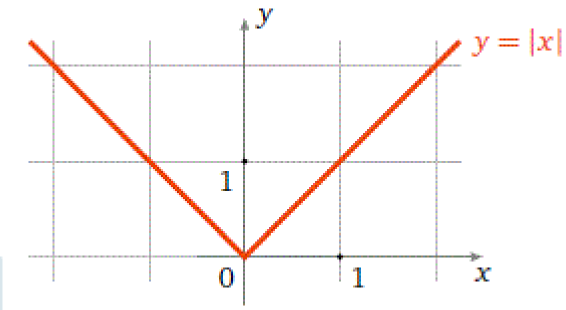
لنذكّر بتعريف القيمة المطلقة وخصائصها الّتي تتقنها من دراستك الثّانوية. لنبدأ بإعطاء التّعريف الّذي يعود لـ François Viète عام 1591.

تعريف 10 :

من أجل أيّ عدد حقيقيّ x، نعرّف القيمة المطلقة لـ x بالعلاقة :

$$|x| = \begin{cases} x & ; \ if \quad x \geq 0 \\ -x & ; \ if \ x < 0 \end{cases}$$

و يمثّل بيان تابع القيمة المطلقة $x \longmapsto |x|$ بالشّكل :



الشّكل (5) : تابع القيمة المطلقة

مبرهنة 4 : من أجل أيّ عددين حقيقيّين $x, y \in \mathbb{R}$

1. $|x| \geq 0 \ ; \ |-x| = |x| \quad , \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|x.y| = |x|.|y|$
4. $\forall n \in \mathbb{N} \ or \ \mathbb{Z} \quad , \ |x|^n = |x^n|$
5. عندما $x \neq 0$ $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, لنعمّم $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$
6. عندما $y \geq 0$ و $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq +y$
7. عندما $y \geq 0$ و $|x| \geq y \Leftrightarrow x \leq -y \quad or \ x \geq y$
8. متراجحة المثلّث : $|x + y| \leq |x| + |y|$

9. متراجحة المثلّث الثّانية: $||x|-|y|| \le |x-y|$

سنكتفي ببرهان متراجحتي المثلّث الأوّلى والثّانية :

- لدينا $-|x| \le x \le |x|$ وَ $-|y| \le y \le |y|$, بالجمع نحصل على $-(|x|+|y|) \le x+y \le (|x|+|y|)$,
  وعليه حسب تعريف القيمة المطلقة لعدد نحصل على $|x+y| \le |x|+|y|$.
- بما أنّ $x=(x-y)+y$, يكون لدينا حسب متراجحة المثلّث الأولى :

$$|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$$

وعليه $|x|-|y| \le |x-y|$, والآن بقلب الأدوار بين العددين الحقيقيّين x, y , نحصل على $|y|-|x| \le |y-x|$.

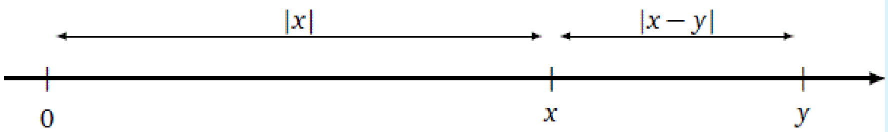
بما أنّ

$|y-x| = |x-y|$ وبحسب تعريف القيمة المطلقة يكون :

$$||x|-|y|| \le |x-y| \qquad \blacksquare$$

خصائص (القيمة المطلقة والمسافة) :

لدينا على مستقيم الأعداد الحقيقيّة, $|x-y|$ ، تمثّل المسافة بين العددين الحقيقيّين y وَ x . بشكل خاص $|x|$ يمثّل بعد العدد الحقيقيّ x عن الصّفر.



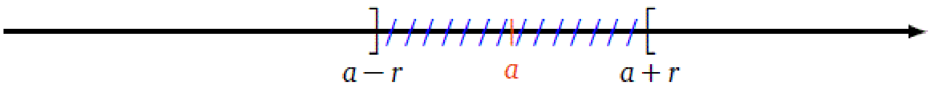
الشّكل (6): المسافة بين عددين حقيقيّين.

كذلك لدينا :

$$\forall x, a, r \in \mathbb{R}, \quad |x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$$

أو كما سنرى لاحقاً :

$$|x-a| < r \Leftrightarrow x \in \,]a-r, a+r[$$



الشّكل (7) : المجال الحقيقيّ

(9-1) كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$:

المجال : يكون في ثلاث حالات : مغلق, ومفتوح, ونصف مفتوح.

تعريف 11 :

المجال المغلق المحدود في $\mathbb{R}$ هو مجموعة جزئية I من $\mathbb{R}$ تحقق الخاصّة :

$$\forall a, b \in I \quad , \forall x \in \mathbb{R} \ ; \ (a \leq x \leq b \quad \Longrightarrow x \in I = [a, b])$$

ملاحظة :

- بالتّعريف $I = \emptyset$ تمثّل المجموعة الخالية؛ أي الّتي لا تحتوي على أيّ عدد حقيقيّ, مجالاً, يمكن أن نعبر عنها بالشّكل $a \in \mathbb{R} ; \ ]a, a[= \emptyset$
- المجال الّذي يحتوي على عدد حقيقيّ واحد فقط (مجموعة وحيدة العنصر). يمكن أن نعبّر عن المجموعة وحيدة العنصر على شكل مجال مغلق بالشّكل $a \in \mathbb{R} , \ [a, a] = \{a\}$.
- كذلك $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ مجال.

تعاريف 12 :

- **المجال المفتوح والمحدود** هو مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ بالشّكل الآتي :

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ , حيث } a, b \in \mathbb{R}; a \leq b$$

- **المجال نصف المفتوح والمحدود** هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \text{ حيث } a, b \in \mathbb{R}; a \leq b$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \text{ حيث } a, b \in \mathbb{R}; a \leq b$$

- **المجال المغلق وغير المحدود** في $\mathbb{R}$ هو:

$$a \in \mathbb{R};\quad [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\},$$

$$b \in \mathbb{R};\quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$$

ملاحظة :

$$\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[,\qquad \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[\ \ ,\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$$

$$\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0]\ \ ,\ \ \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$$

المجال الحقيقيّ	المحدود	غير المحدود
المفتوح	$]a,b[,\emptyset$	$]-\infty,a[;\ ]a,+\infty[;\ \mathbb{R}$
المغلق	$[a,b];\ \{a\};\ \emptyset$	$]-\infty,a];\ [a,+\infty[;\ \mathbb{R}$
نصف المفتوح	$]a,b];\ \ [a,b[$	

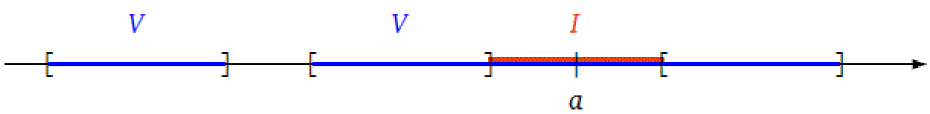
الجدول (1) : المجالات الحقيقيّة

تعريف الجوار(13) :

ليكن a عدداً حقيقيّاً ,ولتكن V مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ $(V \subset \mathbb{R})$, يقال عن V إنّها جوار للعدد الحقيقيّ a, إذا وجد مجال مفتوح I بحيث $a \in I, I \subset \mathbb{R}$.

بكلام آخر : يقال عن V، إنّها جوار للعدد الحقيقي a إذا وفقط إذا تحقق:

$$\exists \varepsilon > 0;\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$$



الشّكل (8) : الجوار

الكثافة

نظريّة 1 :

1. $\mathbb{Q}$ **كثيفة في** $\mathbb{R}$: كلّ مجال مفتوح غير خالٍ في $\mathbb{R}$ يحتوي على عدد غير منتهٍ من الأعداد العاديّة.
2. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **كثيفة في** $\mathbb{R}$: كلّ مجال مفتوح غير خالٍ في $\mathbb{R}$ يحتوي على عدد غير منتهٍ من الأعداد غير العاديّة.

(1-10) القيم الصّغرى والعظمى :

تعريف (14) : لتكن A مجموعة غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، نقول عن العدد الحقيقيّ a، إنّه العنصر الأعظميّ للمجموعة A إذا تحقّق :

$$a \in A, \quad \text{و} \ \forall x \in A \,, x \leq a$$

ملاحظة : إذا وجد العنصر الأعظميّ في مجموعة فهو وحيد, ويرمز له بالرّمز : $\max A$.

يرمز للعنصر الأصغريّ للمجموعة A بالرّمز $\min A$، وإذا وجد فهو يحقّق العلاقة:

$$a \in A, \quad \text{و} \ \forall x \in A \,, x \geq a$$

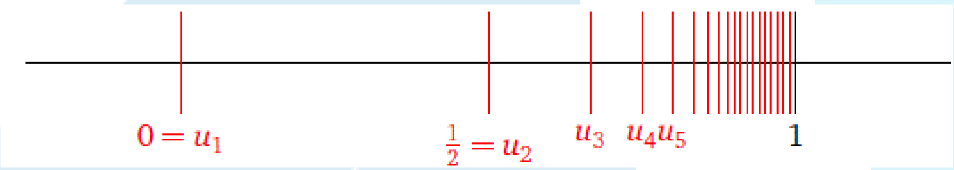
ملاحظة : العنصر الأعظميّ $\max$ اختصاراً لـ maximum، والعنصر الأصغريّ $\min$ اختصاراً لـ minimum. كذلك علينا الأخذ بعين الاعتبار أنّ العنصر الأصغريّ والأعظميّ، ليس بالضّرورة أن يكون موجود دوماً.

أمثلة :

- $\max[a,b] = b, \quad \min[a,b] = a$
- المجال $]a,b[$، لا يملك عنصراً أعظميّاً ولا عنصراً أصغريّاً.
- المجال $[0,1[$، يملك عنصراً أصغريّاً، وهو الصّفر بينما لا يملك عنصراً أعظميّاً.

مثال : لنعرّف المجموعة A كما يلي $A = \left\{1 - \frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$

لنرمز بـ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$. عندئذ $A = \{u_n; \quad n \in \mathbb{N}^*\}$ يعطى التّمثيل البيانيّ للمجموعة A على مستقيم الأعداد الحقيقيّة كما يلي :



الشّكل (9) : العنصر الأعظميّ والأصغريّ

1. المجموعة A، لا تملك عنصراً أعظميّاً : لنفرض أنّ المجموعة A، تملك عنصراً أعظميّاً $\alpha = \max A$. عندئذ حسب التّعريف $u_n \leq \alpha$, من أجل كلّ n، وعليه $\alpha \geq 1 - \frac{1}{n}$. عندما $n \to +\infty$، يكون لدينا $\alpha \geq 1$. بما أنّ α عنصر أعظميّ، وبالتالي $\alpha \in A$, عندئذ يوجد حد رقمه n_0، بحيث $\alpha = 1 - \frac{1}{n_0} < 1$، وهذا تناقض مع ما رأيناه أنّ $\alpha \geq 1$. وعليه المجموعة A، لا تملك عنصراً أعظميّاً.
2. $\min A = 0$, لدينا أمران، يجب التّحقق منهما. الأمر الأوّل : انتماء الصّفر للمجموعة؛ إذ إنّه من أجل $n = 1$ يكون $u_1 = 0$، والأمر الثّاني : تحقّق الشّرط $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

(11-1) الحدود العليا والدّنيا :

تعريف (15) : لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$. يقال عن العدد الحقيقيّ M إنّه حدّ أعلى للمجموعة A إذا تحقّق $\forall x \in A, x \leq M$.

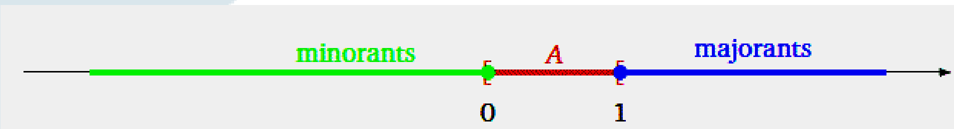
كذلك يقال عن العدد الحقيقيّ m، إنّه حدّ أدنى للمجموعة A إذا تحقّق

$\forall x \in A;\ \ x \geq m$.

أمثلة :

- 3 يمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $]0,2[$.
- $-7, -2, -\pi$ ، تمثّل حدوداً دنيا للمجموعة $[0, +\infty[$، بينما لا تملك حدّاً أعلى.

مثال : المجموعة $A = [0,1[$



الشّكل (10) : الحدود العليا والدّنيا لمجموعة

1. الحدود العليا للمجموعة A، هي كافّة العناصر $[1, +\infty[$
2. الحدود الدّنيا للمجموعة A، هي كافة العناصر $]-\infty, 0]$

تعريف (16) :

لتكن A مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقيّة, وليكن α عدداً حقيقيّاً.

1. يقال عن α إنّه حدَ أعلى أصغريّ للمجموعة A، إذا كان حدّاً أعلى للمجموعة، وكان أصغر الحدود العليا. فإذا وجد سنرمز له بالرّمز $\alpha = \sup A$.

2. يقال عن α إنّه حدّ أدنى أعظميّ للمجموعة A، إذا كان حدّاً أدنى للمجموعة، وكان أعظم الحدود الدّنيا. إذا وجد فإنّنا نرمز له $\alpha = \inf\ A$.

أمثلة :

i. $A =]0,1]$
- $\sup A = 1$، في الحقيقة، مجموعة الحدود العليا هي $[1, +\infty[$، وأصغر هذه الحدود العليا هو 1.
- $\inf A = 0$ ، في الحقيقة، مجموعة الحدود الدّنيا للمجموعة هي $]-\infty, 0]$ وأكبر هذه الحدود الدّنيا هو 0.

ii. $\sup[a, b] = b$

iii. $\inf\,[a, b] = a$

iv. $\sup]a, b[= b$

v. $]0, +\infty[$ لا تقبل حدّاً أعلى أصغريّاً.

vi. $\inf]0, +\infty[= 0$

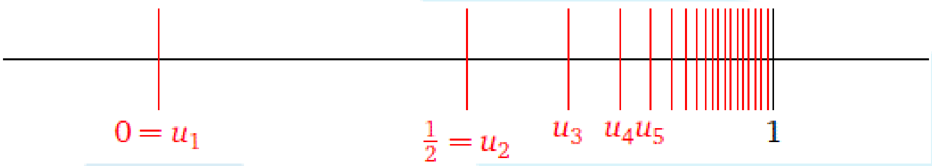
مبرهنة 5 : (توصيف الحدّ الأعلى)

لتكن A مجموعة من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى وغير خالية, عندئذ $\sup A$، هو عدد حقيقيّ وحيد، يحقّق :

i. $if\ x \in A\ , x \leq \sup A$

ii. $\forall y < \sup A\ ,\quad \exists x \in A; y < x.$

مثال : لنعود ونأخذ المجموعة A كما يلي $A = \left\{1 - \frac{1}{n};\ \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$



الشّكل (11) : الحدّ الأعلى الأصغريّ والأدنى الأعظميّ

1. لقد رأينا أنّ $\min A = 0$. بما أنّ العنصر الأصغريّ في المجموعة موجود، فهو بالضّرورة نفسه الحد الأدنى الأعظميّ؛ أي أنّ

$$\inf A = \min A = 0$$

2. الطّريقة الأولى لإثبات أنّ $\sup A = 1$,باستخدام تعريف الحدّ الأعلى الأصغريّ، ليكن M حدّاً أعلى للمجموعة A، عندئذ $M \geq 1 - \frac{1}{n}$ بأخذ النّهاية، يكون $M \geq 1$. بالعكس إذا كان $M \geq 1$، يكون M حدّاً أعلى للمجموعة، وعليه مجموعة الحدود العليا للمجموعة A، هي $[1, +\infty[$ ، ومن أصغر الحدود العليا هو 1، ويكون $\sup A = 1$.

3. الطريقة الثّانية لإثبات أنّ $\sup A = 1$، باستخدام توصيف الحد الأعلى

a. $if\ x \in A \implies x \leq 1$، حيث 1 هو حدّ أعلى للمجموعة.

b. $\forall y < 1, \exists x \in A; y < x$: في الواقع بأخذ n كبير بما يكفي، عندئذ $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$. وبهذا $y < 1 - \frac{1}{n}$, ومنه استطعنا إيجاد $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$، وتحقّق الشّرط الثّاني إذن $\sup A = 1$.

مبرهنة 6 : (توصيف الحدّ الأعلى الأصغريّ والحدّ الأدنى الأعظميّ)

لتكن A مجموعة من $\mathbb{R}$ غير خالية :

1. إذا كانت المجموعة A محدودة من الأعلى بـ M

$$M = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \qquad x \in]M - \varepsilon, M]$$

2. إذا كانت المجموعة A محدودة من الأدنى بـ m

$$m = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 , \exists x \in A , x \in [m, m + \varepsilon[$$

- خاصّة للحدّ الأعلى الأصغريّ (Bolzano 1817) :

كلّ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ غير خالية ومحدودة من الأعلى، تملك حدّاً أعلى أصغريّاً.

- خاصّة للحدّ الأعلى الأصغري

كلّ عدد حقيقيّ، يمثّل حدّاً أعلى أصغريّاً لمجموعة ما من عناصر $\mathbb{Q}$:

ملاحظة :

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x^2 < 2\}$$

لدينا $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ حدّ أعلى أصغريّ لهذه المجموعة، ولكن لا يوجد حدّ أعلى أصغريّ لهذه المجموعة ضمن $\mathbb{Q}$.

مبرهنة 7 :

لتكن A مجموعة من $\mathbb{R}$ محدودة من الأعلى وغير خالية, عندئذ $\sup A$ هو عدد حقيقيّ وحيد يحقّق :

i. $\sup A$ حدّ أعلى للمجموعة A.

ii. يوجد متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر المجموعة A، تتقارب نحو $\sup A$