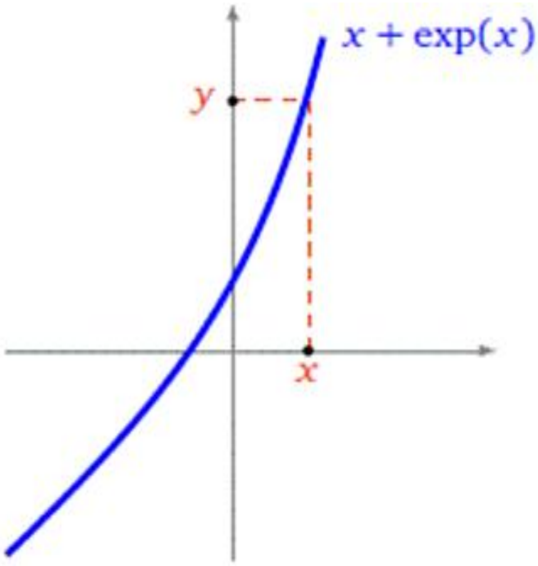
التوابع الحقيقية – النهايات – الاستمرار

المعادلات بمتحول واحد يمكن حلها ببساطة, على سبيل المثال $ax+b=0$ أو من الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$ ولكن غالبية المعادلات ليس من السهولة إيجاد صيغة معينة لحلها وكذلك نجد أنه من الصعب معرفة فيما إذا كانت تملك حدود أو لا وفي حال وجود الحلول كم عددها. لنأخذ المعادلة البسيطة التالية



$$x+\exp x=0$$

لا نستطيع إيجاد صيغة صريحة (باستخدام الجمع, الطرح , الضرب , ..) للحصول على قيم x التي تحقق المعادلة. في هذا الفصل سنرى بفضل دراسة التابع $f(x)=x+\exp x$ سنستطيع إيجاد حلول المعادلة $x+\exp x=0$ أو بشكل أعم $x+\exp x=y$ حيث y قيمة حقيقية ثابتة. كل ما سبق سيتم دراسته بالتفصيل من خلال دراسة تغيرات التابع f واستمراره.

مفهوم التابع:

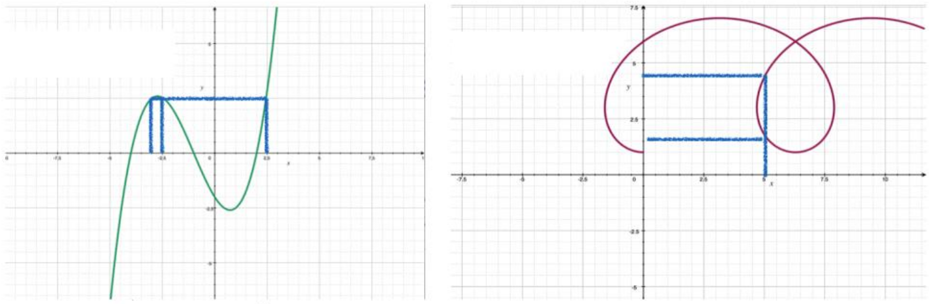
ليكن I و J مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$

تعريف(التابع):

التابع لقيم حقيقية بقيم حقيقية f, يعرف ب مجموعة المنطلق $(I\subset\mathbb{R})$ ومجموعة المستقر $(J\subset\mathbb{R})$ وبعلاقة تربط كل عنصر من عناصر المنطلق بعنصر واحد على الأكثر من عناصر المستقر.

ملاحظة:

كل عنصر من المنطلق يملك " على الأكثر " صورة واحدة في المستقر, أي أنه قد يوجد عناصر من المنطلق لا تملك صور في المستقر. كذلك يمكننا القول أن عناصر المنطلق لا يمكن أن تملك أكثر من صورة. وهذا ما يظهر بشكل واضح أثناء رسم بيان التابع:



تابع — ليس تابع

تعريف (مجموعة تعريف التابع Domain)

ليكن $(I \subset \mathbb{R})$ و $(J \subset \mathbb{R})$

مجموعة عناصر المنطلق I التي تملك صورة وفق التابع f ضمن J تدعى **مجموعة تعريف التابع** f, ونرمز له $\mathcal{D}_f$.

ملاحظة: المستقر الفعلي (المدى– Range) للتابع هي مجموعة جزئية من المستقر J تحتوي فقط على صور عناصر مجموعة التعريف.

تعريف(التطبيق):

ليكن $(I \subset \mathbb{R})$ و $(J \subset \mathbb{R})$

التطبيق f, يعرف ب مجموعة المنطلق $(I \subset \mathbb{R})$ ومجموعة المستقر $(J \subset \mathbb{R})$ وبعلاقة تربط **كل** عنصر من عناصر المنطلق **بعنصر واحد فقط** من عناصر المستقر.

ملاحظة:

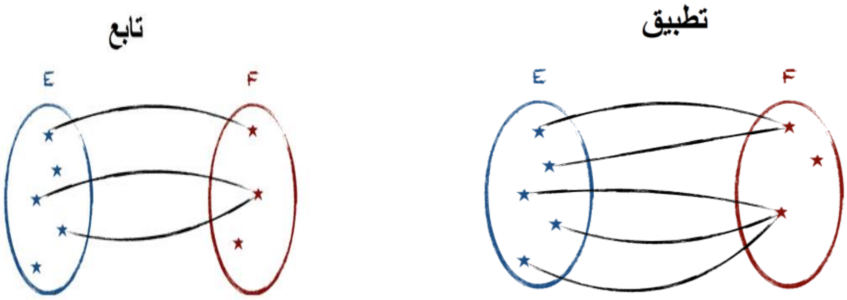
- نرمز للتابع f بالشكل التالي:

$$f: I \to J$$
$$x \mapsto f(x)$$

- والتطبيق f بالشكل التالي:

$$f: \mathcal{D}_f \to J$$

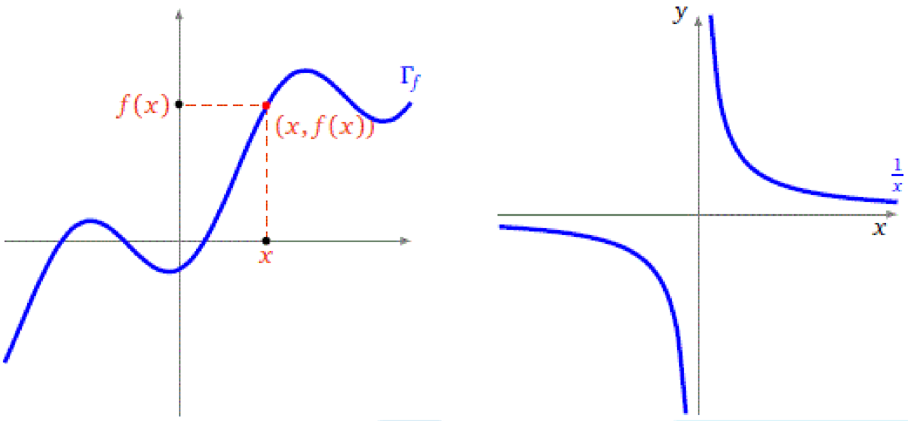
$$x \mapsto f(x)$$

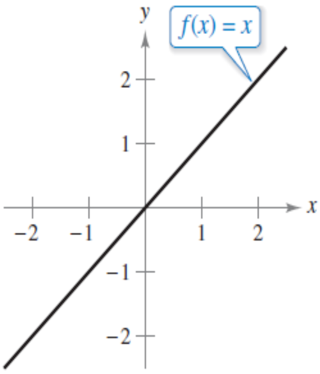


تعريف:

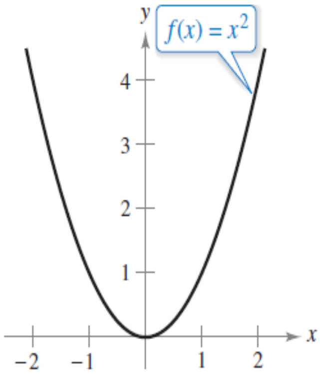
بيان التابع $f: U \to \mathbb{R}$ هي المجموعة Γ_f الجزئية من $\mathbb{R}^2$ المعرفة بالشكل: $\Gamma_f := \{(x, f(x));\quad x \in U\}$

أدناه يوجد بيان لتابع f وعلى اليسار يوجد بيان التابع العكسي:

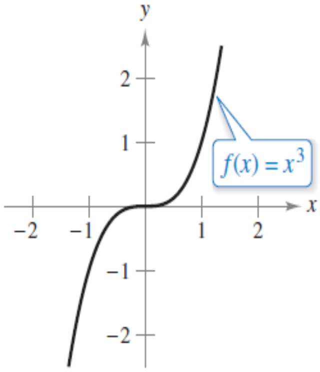




Identity function



Squaring function



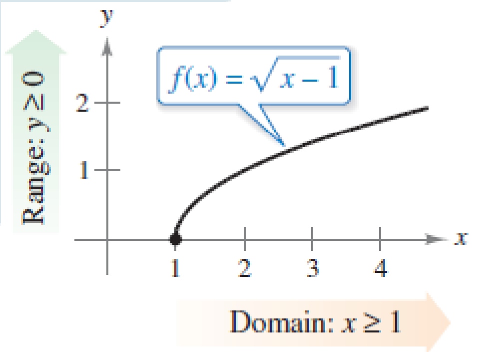
Cubing function

ملاحظات:

- f يمثل تابع أو تطبيق.
- $f(x)$ عدد حقيقي يمثل صورة القيمة x وفق التابع f.
- Γ_f بيان التابع, تمثيل التابع في الفضاء.
- انتبه: نقول ليكن f تابع ولكن **لا نقول** ليكن $f(x)$ تابع.

أمثلة:

1. أوجد مجموعة التعريف والمدى للتابع $f(x) = \sqrt{x-1}$



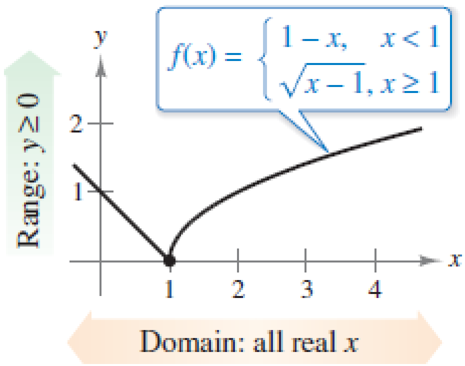
مجموعة تعريف التابع هي

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1, +\infty[$

المدى:

نلاحظ أن التابع لا يمكن أن يأخذ قيم سالبة حيث أن الجذر موجب دائماً وقد ينعدم وبالتالي المدى هو المجموعة $[0, +\infty[$

2. أوجد مجموعة التعريف والمدى للتابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x & if \ \ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & if \ \ x \geq 1 \end{cases}$



التابع معرف على قيم $x < 1$ وعلى قيم $x \geq 1$ وبالتالي مجموعة تعريف التابع هي كامل $\mathbb{R}$ بالنسبة للمدى: عندما $x \geq 1$ قيم التابع موجبة كما في المثال السابق, كما نرى أنه عندما $x < 1$ كذلك القيم موجبة ومنه المدى هو المجموعة $[0, +\infty[$

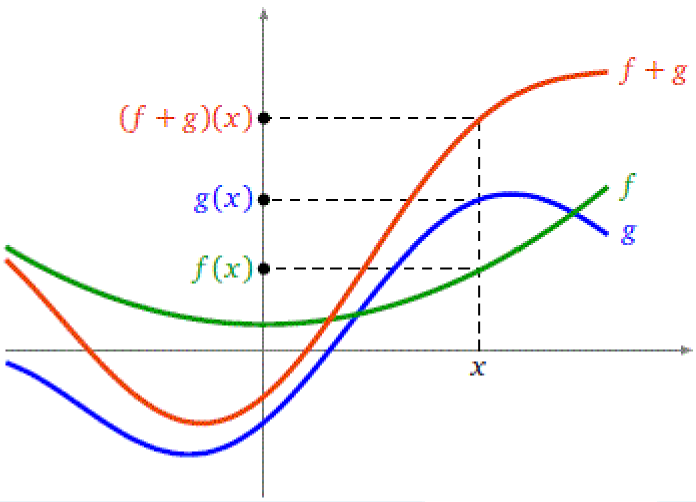
العمليات على التوابع:

تعريف:

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين معرفين على المجموعة U الجزئية من $\mathbb{R}$ بإمكاننا تعريف التوابع التالية:

- مجموع التابعين f و g هو التابع $f + g: U \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in U;$
- جداء التابعين f و g هو التابع $f.g: U \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \ \forall x \in U;$
- جداء التابع f بالعدد السلمي λ هو التابع $\lambda.f: U \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \ \forall x \in U;$

أدناه نبين بيان مجموع تابعين:



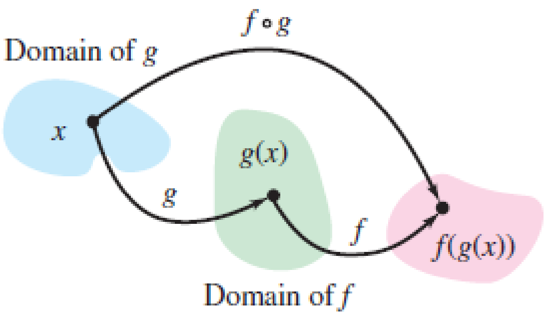
تعريف (مقصور التابع f):

ليكن f تطبيق معرف على المجال $I \subset \mathbb{R}$. وليكن I_0 مجال من مجموعة الأعداد الحقيقية محتوى في المجال I. ندعو مقصور التابع f على المجال I_0 ونرمز له $f|_{I_0}$, التابع المعرف على I_0 بالشكل:

$$\forall x_0 \in I_0 \quad f|_{I_0}(x) = f(x)$$

تركيب التوابع:

تعريف تركيب تابعين: ليكن f,g تابعين, التابع المعطى بالعلاقة $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ يدعى تركيب التابعين g و f, مجموعة تعريف التابع $f \circ g$ هي مجموعة العناصر x من مجموعة تعريف g بحيث $g(x)$ تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع f



ليكن f تابع معرف على المجال $(I \subseteq \mathbb{R})$ ويأخذ قيمه في المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$

و ليكن g تابع معرف على المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$ ويأخذ قيمه في المجال $(K \subseteq \mathbb{R})$

تركيب التابعين f,g هو تابع جديد ونرمز له $(g \circ f)$ معرف بالشكل:

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

كما يمكن كتابته بالشكل:

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$$

مثال:

ليكن $g(x) = \cos x \quad f(x) = 2x - 3,$ أوجد $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\cos x) = 2\cos x - 3$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-3) = \cos(2x-3)$$

نلاحظ أن: $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

التوابع المحدودة:

تعريف :

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين عندئذ:

- يكون $f \geq g$ إذا تحقق $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$
- يكون $f \geq 0$ إذا تحقق $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$
- يكون $f > 0$ إذا تحقق $\forall x \in U \quad f(x) > 0$
- يكون التابع f ثابت إذا تحقق: $\exists \alpha \in \mathbb{R}; \ \forall x \in U; \ f(x) = \alpha$
- يكون f تابع صفري إذا تحقق $\forall x \in U \quad f(x) = 0$

تعريف:

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع نقول عن :

- f أنه تابع محدود من الأعلى على U إذا تحقق:

$$\exists M \in \mathbb{R}; \ \forall x \in U; \ f(x) \leq M$$

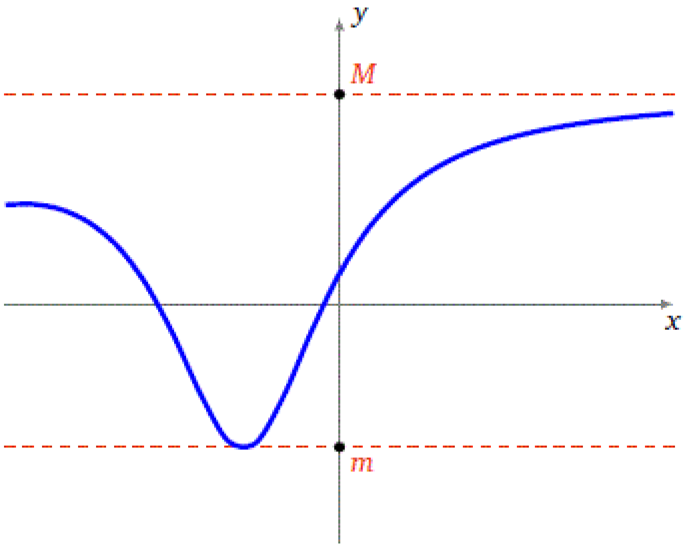
- f أنه تابع محدود من الأدنى على U إذا تحقق:

$$\exists m \in \mathbb{R}; \ \forall x \in U; \ f(x) \geq m$$

- f أنه تابع محدود على U إذا كان محدود من الأعلى والأدنى في آن معاً , بكلام آخر :

$$\exists M \in \mathbb{R}; \ \forall x \in U; \ |f(x)| \leq M$$

البيان أدناه يمثل بياناً لتابع محدود (من الأدنى ب m ومن الأعلى ب M)



التوابع المضطردة

تعريف (التوابع المضطردة):

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع نقول عن :

- f أنه تابع متزايد على U إذا تحقق:

$$\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

- f أنه تابع متزايد تماماً على U إذا تحقق:

$$\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

- f أنه تابع متناقص على U إذا تحقق:

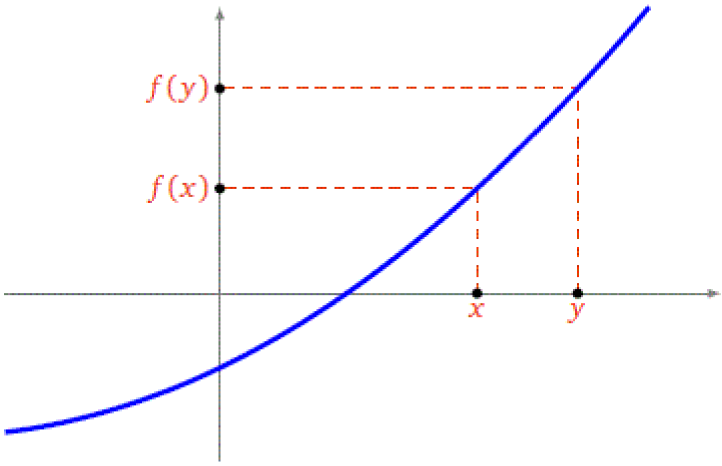
$$\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

- f أنه تابع متناقص تماماً على U إذا تحقق:

$$\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

- f مضطرد (مضطرد تماماً) إذا كان متزايد أو متناقص (متزايد تماماً أو متناقص تماماً)

أدناه بيان لتابع متناقص تماماً :



أمثلة:

- تابع الجذر التربيعي $\begin{cases}[0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}\end{cases}$ متزايد تماماً .
- التابع الأسي $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ والتابع اللوغاريتمي $\ln:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ تمثل توابع متزايدة تماماً .
- تابع القيمة المطلقة $\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{cases}$ تابع ليس متزايد وليس متناقص, إنما التابع $\begin{cases}[0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{cases}$ متزايد تماماً .

التوابع الزوجية– الفردية – الدورية:

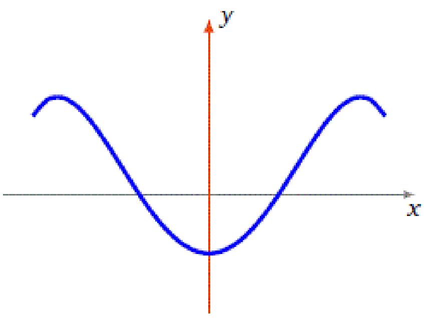
تعريف:

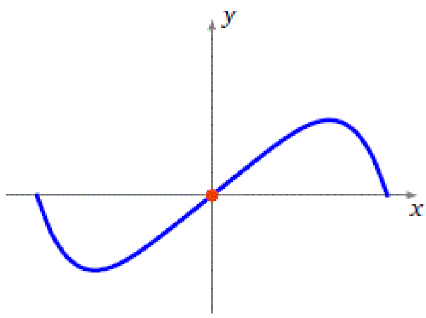
ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة للصفر(أي أنه من الشكل $[-a,a]$ أو $]-a,a[$ أو $\mathbb{R}$), وليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ نقول عن f أنه:

- زوجي إذا تحقق $\forall x \in U,\ f(-x) = f(x)$
- فردي إذا تحقق $\forall x \in U,\ f(-x) = -f(x)$

بيانياً:

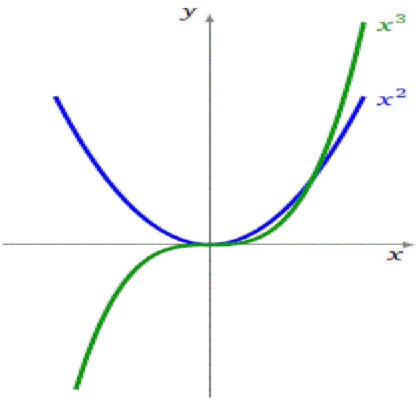
- يكون التابع f زوجي إذا وفقط إذا كان بيانه متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.
- يكون التابع f فردي إذا وفقط إذا كان بيانه متناظر بالنسبة للمبدأ.





أمثلة:

- التابع المعرف بالشكل $x \longmapsto x^{2n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ زوجي.
- التابع المعرف بالشكل $x \longmapsto x^{2n+1}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ فردي.
- التابع $\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ زوجي, والتابع $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ فردي.



مثال:

حدد إذا كان التابع فردي أو زوجي ثم أوجد أصفار التابع، من أجل كل من

$$f(x) = x^3 - x, \qquad g(x) = 1 + \cos x$$

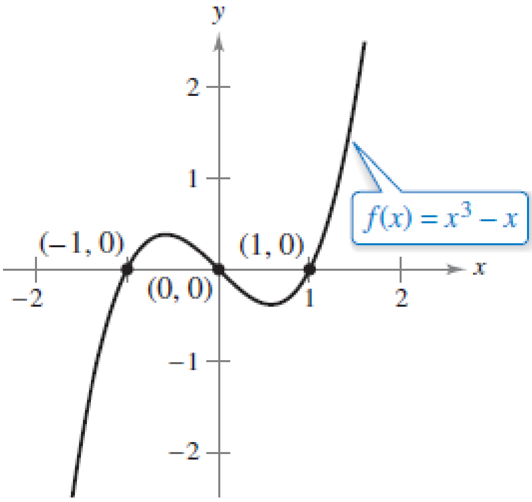
الحل: التابع f فردي والتابع g زوجي لأن:

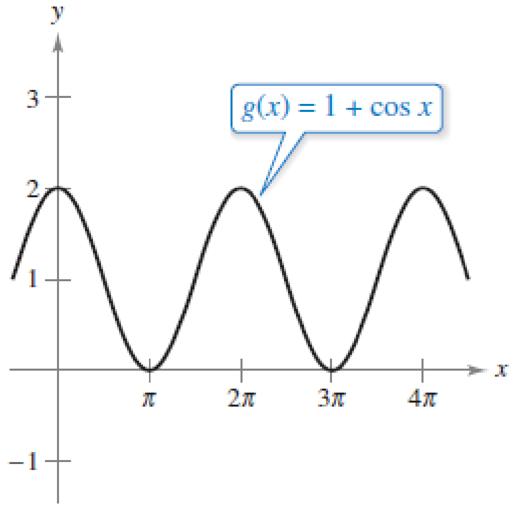
$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,1,-1$$

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

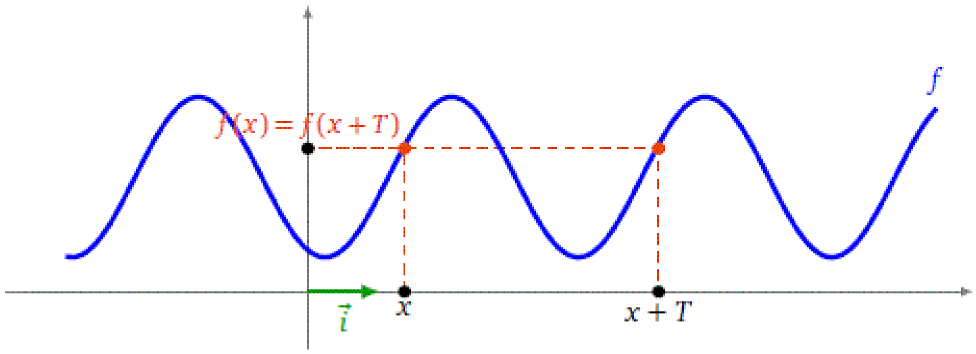




تعريف:

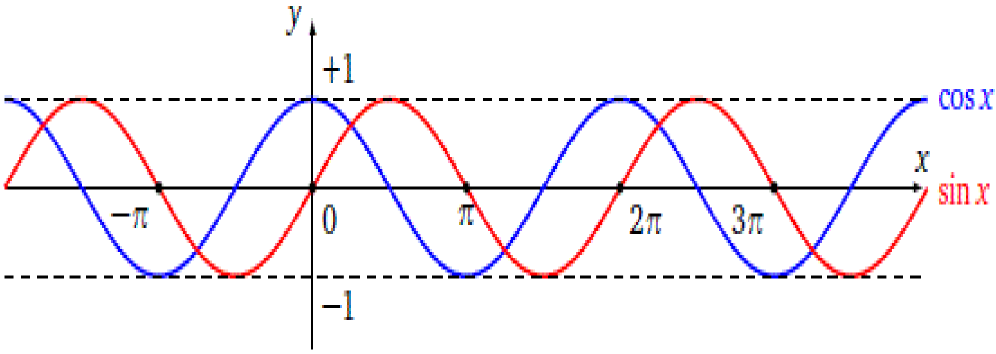
ليكن $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع وليكن $T > 0$ عدد حقيقي موجب تماماً . نقول عن التابع f أنه دوري بدور T إذا تحقق :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$



مثال:

تابع ال $\cos$ و ال $\sin$ كلاهما دوري بدور 2π, بينما تابع ال $\tan$ دوري بدور π.



مدخل إلى النهايات:

لرسم الخط البياني للتابع

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

يمكننا رسم بيان التابع بسهولة من أجل كل نقاط $\mathbb{R}$ ماعدا $x = 1$, حيث أن النقطة غير واضحة ولا يمكننا معرفة سلوك التابع عندها.

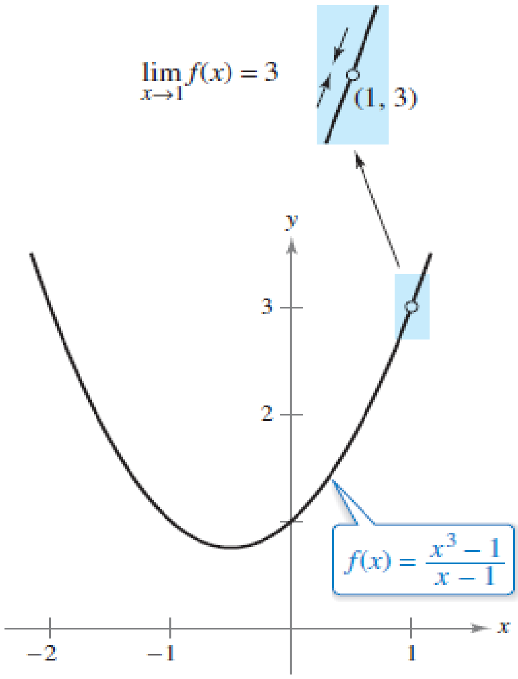
حتى يتكون لدينا فكرة واضحة عن سلوك التابع عند $x = 1$ نستخدم مجموعتين من قيم x , إحداها تقترب من x من اليمين والأخرى تقترب من x من اليسار. كما هو موضح في الجدول أدناه

x تقترب من الواحد من اليسار ← → x تقترب من الواحد من اليمين

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ تقترب من 3 ← → $f(x)$ تقترب من 3

الخط البياني للتابع f عبارة عن قطع مكافئ ذروته النقطة $(1,3)$ كما هو موضح بالشكل. على الرغم من أن x لا يمكن أن تأخذ القيمة 1, إلا أننا يمكننا الاقتراب بشكل كبير جداً منها, وتكون قيمة $f(x)$ قريبة جداً من 3. ويمكننا أن نكتب $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ ونقرأ نهاية التابع عندما x تسعى نحو 1 هي 3. (سنوضح التعريف الدقيق للنهاية حال الانتهاء من المقدمة)



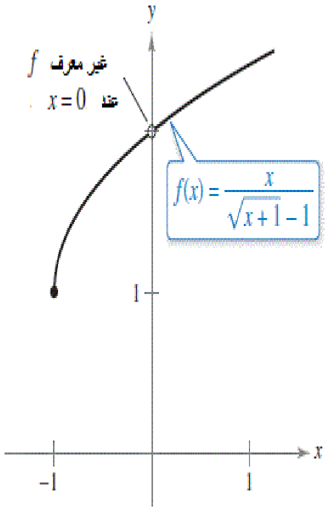
مثال: أوجد قيمة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ عند عدة نقاط بالقرب من الصفر واستخدم النتائج في تقدير قيمة النهاية

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

x تقترب من الصفر من اليسار ← → x تقترب من الصفر من اليمين

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$f(x)$ تقترب من 2 ← → $f(x)$ تقترب من 2

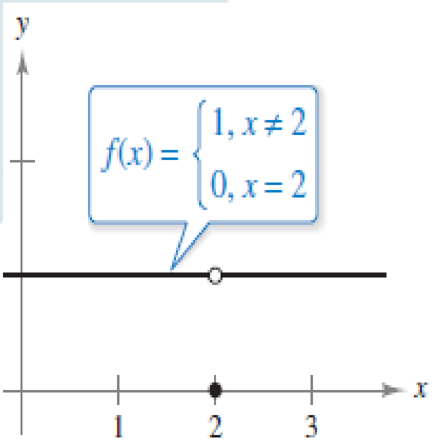


من النتائج الموضحة في الجدول أعلاه يمكننا تقدير نهاية التابع عند $x = 0$ ب 2.
لاحظ أن التابع غير معرف عند الصفر إلا أن نهاية التابع عندما x تقترب من الصفر موجودة ومنتهية.

مثال : أوجد نهاية التابع f عندما x تسعى إلى 2

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

بما أن التابع $f(x) = 1$ من أجل كل $x \neq 2$. يمكننا أن نستنتج أن النهاية تساوي 1 كما هو موضح في الشكل أدناه ويكون $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$
الجدير بالذكر أن $f(2) = 0$ لا تؤثر على قيمة النهاية عندما x تسعى إلى 2



على سبيل المثال بإمكاننا تعريف التابع بالشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

وهذا لا يؤثر على قيمة النهاية وتبقى مساوية للواحد.

الآن لنعطي التعريف الدقيق للنهاية :

نهاية تابع عند نقطة:

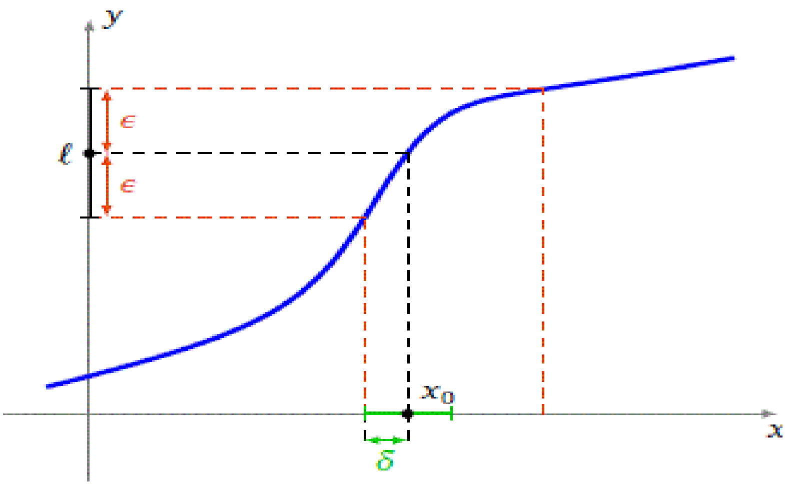
ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$, ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I أو من أطرافه.

تعريف:

ليكن $l \in \mathbb{R}$, نقول عن f أنه يملك نهاية l عند x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

نقول كذلك أن $f(x)$ يسعى نحو l عندما x تسعى نحو x_0 ونرمز لها $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ أو $\lim_{x_0} f = l$

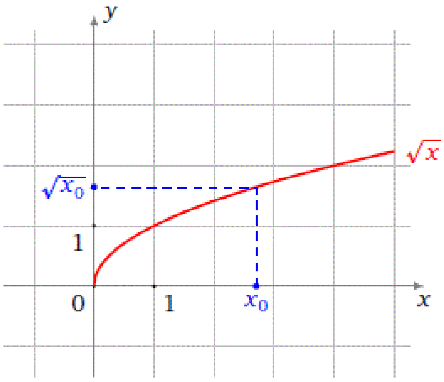


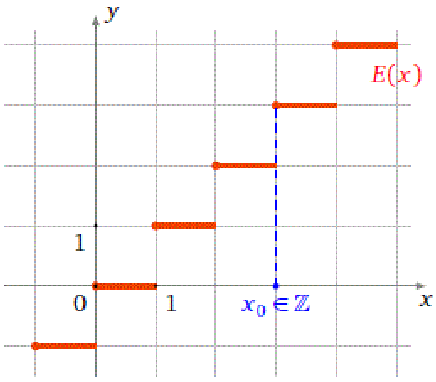
ملاحظة:

- المتراجحة $|x - x_0| < \delta$ مكافئة ل $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, والمتراجحة $|f(x) - l| < \varepsilon$مكافئة ل $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.
- يجب الانتباه لترتيب $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ إذ لا يمكن التبديل بينهما.

أمثلة:

- $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \ \forall x_0 \geq 0$
- تابع الجزء الصحيح E لا يملك نهايات في مجموعة الأعداد الصحيحة.





مثال : إذا كانت

$\lim_{x\to3}(2x-5)=1$, أوجد قيمة

δ, بحيث يكون

$|(2x-5)-1|<0.01$ وذلك

مهما يكن

$$0<|x-3|<\delta$$

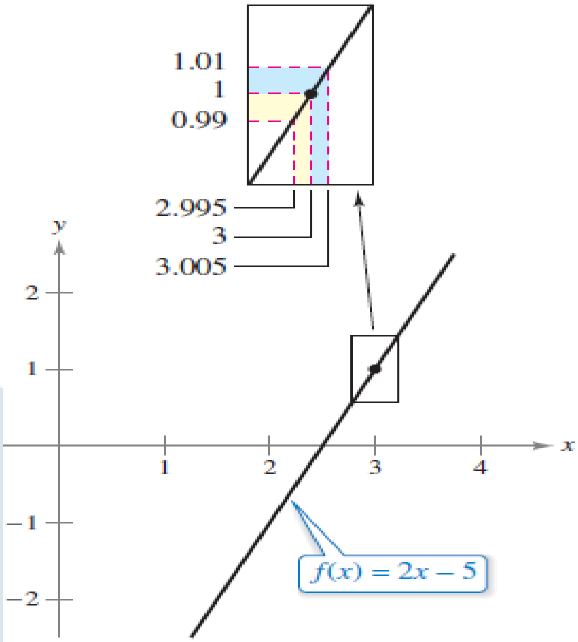
الحل: لدينا $\varepsilon\ =0.01$ لإيجاد قيمة

δ الموافقة لها نأخذ:

$$|f(x)-l| = |2(x-5)-1|$$
$$= |2x-6|$$
$$= 2|x-3|$$

وبالتالي المتراجحة

$$|2(x-5)-1|<0.01$$



وبالتالي نستطيع اختار قيمة δ كما يلي: $\delta=\frac{1}{2}(0.01)=0.005$

للتأكد من اختيارنا نعوض:

$$|2(x-5)-1| = 2|x-3| < 2\times0.005 = 0.01$$

نلاحظ في هذا المثال أن 0.005 هي أكبر قيمة ل δ تحقق:

$|(2x-5)-1|<0.01$ وعليه أي قيمة ل δ أصغر من 0.005 يمكننا اختيارها.

ملاحظة: في مثالنا السابق أوجدنا قيمة δ الموافقة لقيمة ε المعلومة. حتى نثبت وجود النهاية علينا إثبات وجود δ من أجل ε كيفية. كما في المثال التالي:

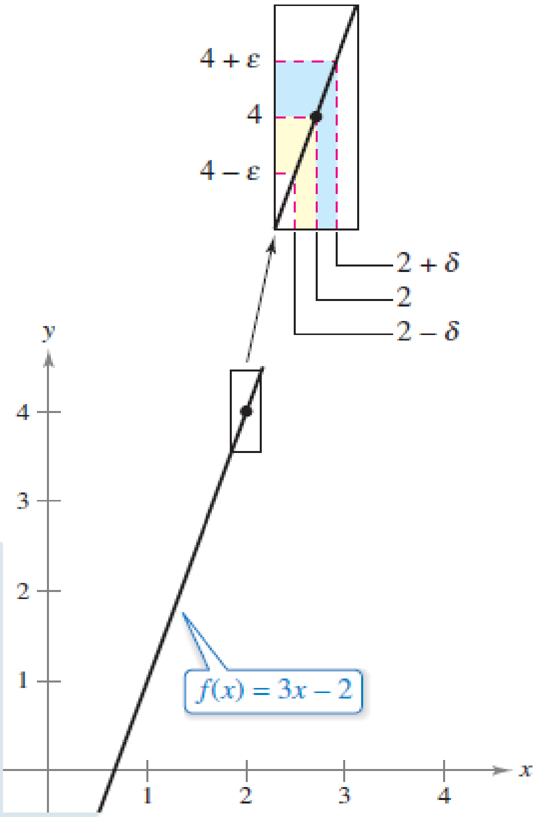
مثال : إذا كان $f(x) = (3x - 2)$. أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, وذلك حسب تعريف النهاية.

الحل: يجب أن نثبت أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ أنه يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$|(3x-2)-4|$$
$$= |3x-6|$$
$$= 3|x-2|$$

وبذلك فإنه من أجل أي قيمة لـ $\varepsilon > 0$ يمكننا اختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ وهذا الاختيار مناسب لأن:

$$|(3x-2)-4| = 3|x-2|$$
$$< 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$



مثال : بالاعتماد على تعريف النهاية أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

الحل: يجب أن نثبت أنه من أجل

كل $\varepsilon > 0$ أنه يوجد $\delta > 0$

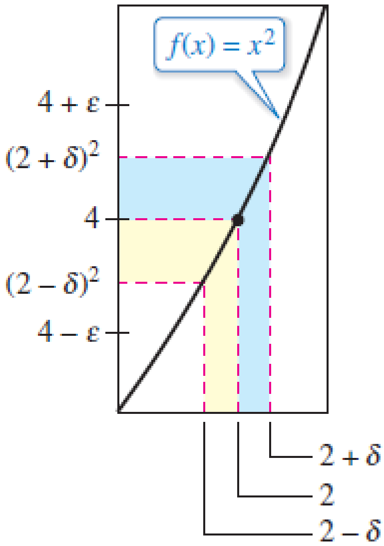
بحيث:

من أجل كل $0 < |x-2| < \delta$

يكون: $|x^2 - 4| < \varepsilon$

لإيجاد δ المناسبة نقوم بما يلي:

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2|$$



من أجل قيم x التي تنتمي للمجال المفتوح $]1,3[$ يكون $x + 2 < 5$

وبالتالي $|x+2| < 5$ لذلك نأخذ $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ هذا ما يحقق المطلوب إذ أنه أياً كان $0 < |x-2| < \delta$ لدينا:

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| < 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon$$

النهاية من اليمين و النهاية من اليسار:

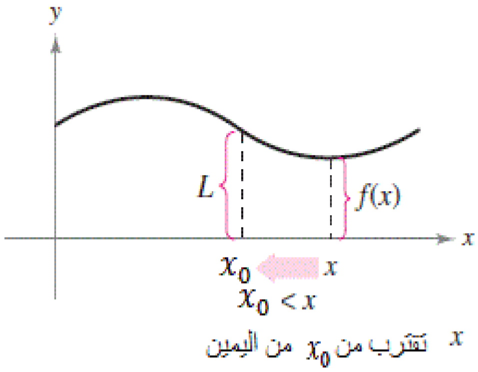
ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال من الشكل $I =]a, x_0[\cup]x_0, b[$

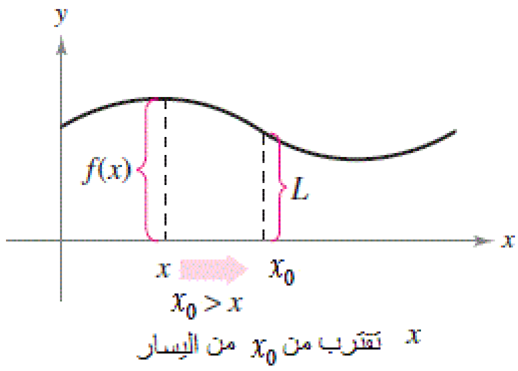
تعريف:

- النهاية من اليمين عند x_0 للتابع f هي نهاية التابع $f_{|]x_0,b[}$ ونرمز لها $\lim\limits_{x_0^+} f$.
- النهاية من اليسار عند x_0 للتابع f هي نهاية التابع $f_{|]a,x_0[}$ ونرمز لها $\lim\limits_{x_0^-} f$.
- نرمز أيضاً $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f$ لنهاية التابع عند x_0 من اليمين و ب $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f$ لنهايته عند x_0 من اليسار.

نقول عن التابع $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ أنه يملك نهاية من اليمين $L \in \mathbb{R}$عند النقطة x_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

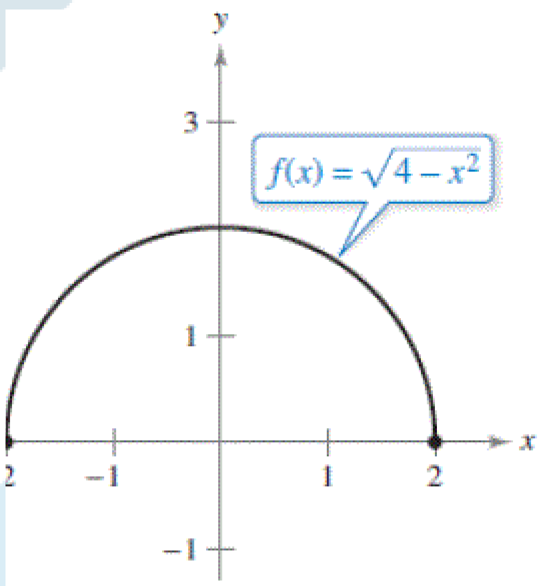




ملاحظات:

- إذا كان التابع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ يملك نهاية عند x_0, عندئذ نهايتي التابع من اليمين واليسار عند x_0 موجودتان ومتطابقان وتطابقان $\lim_{x_0} f$.
- وبالعكس, إذا كان التابع f يملك نهاية من اليمين ونهاية من اليسار عند x_0 وإذا تطابقت هاتين النهايتين مع $f(x_0)$ (إذا كان التابع معرف عند x_0) عندئذ f يملك نهاية عند x_0.

مثال: ادرس النهاية من اليمين للتابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ عندما x تسعى -2 من اليمين :



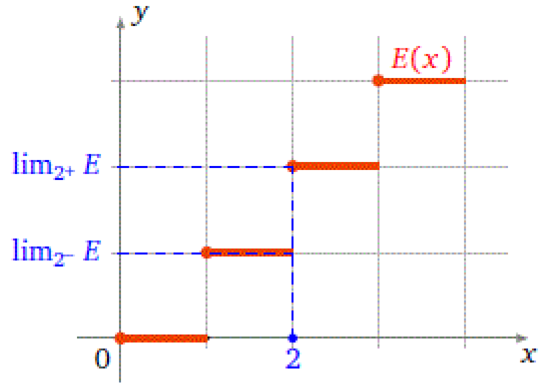
كما هو مبين بالشكل المجاور : عندما x تسعى -2 من اليمين هي:

$$\lim_{-2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

مثال :

لنناقش نهاية تابع الجزء الصحيح عند النقطة $x = 2$:

- $\forall x \in]2,3[$ لدينا $E(x) = 2$, ويكون $\lim\limits_{2^+} E = 2$.
- $\forall x \in]1,2[$ لدينا $E(x) = 1$, ويكون $\lim\limits_{2^-} E = 1$.
- وبالتالي نرى أن نهاية التابع من اليمين عند 2 لا تساوي النهاية من اليسار وبالتالي التابع لا يملك نهاية عند 2.



النهايات غير المحدودة:

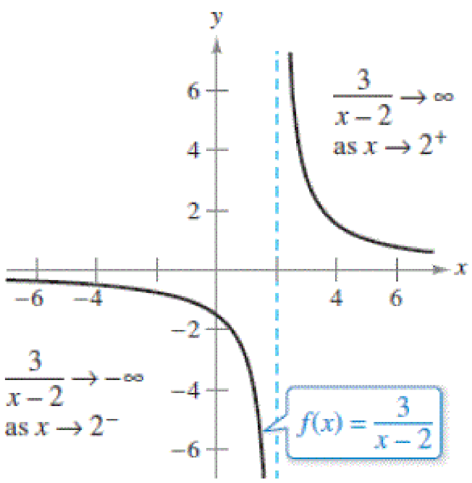
ليكن لدينا التابع المعرف بالشكل:

$f(x) = \frac{3}{x-2}$ من الشكل المجاور والجدول أدناه يتضح أن $f(x)$ يتزايد بلا حدود عندما $x \to 2$ من اليمين وأن $f(x)$ يتناقص بلا حدود عندما $x \to 2$ من اليسار.

ويرمز لهذا السلوك بالرمز

$\lim\limits_{2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$ (التابع يتناقص بلا حدود عندما $x \to 2$ من اليسار)

و $\lim\limits_{2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$ (التابع يتزايد بلا حدود عندما $x \to 2$ من اليمين)



x تقترب من 2 من اليسار

x تقترب من 2 من اليمين

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	-6	-30	-300	-3000	?	3000	300	30	6

$f(x)$ تتناقص بشكل غير محدود

$f(x)$ تتزايد بشكل غير محدود

ليكن التابع f معرف على مجموعة من الشكل $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ ولنعطي الآن التعرف الرياضي الدقيقة للنهاية غير المحدودة:

تعريف:

- نقول أن نهاية التابع f عند x_0 تساوي $+\infty$ إذا تحقق:

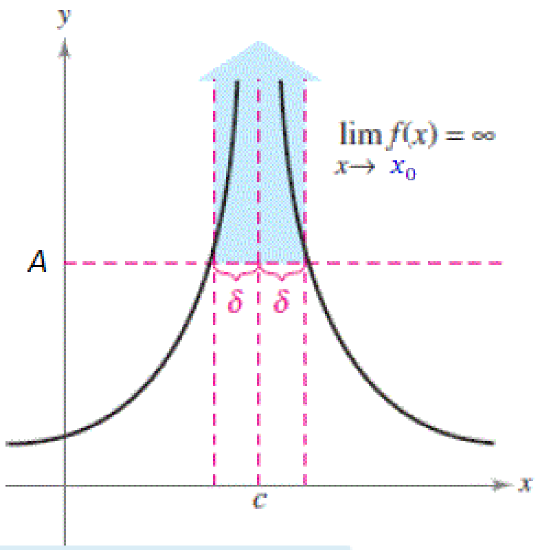
$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A$$

ونرمز لها $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

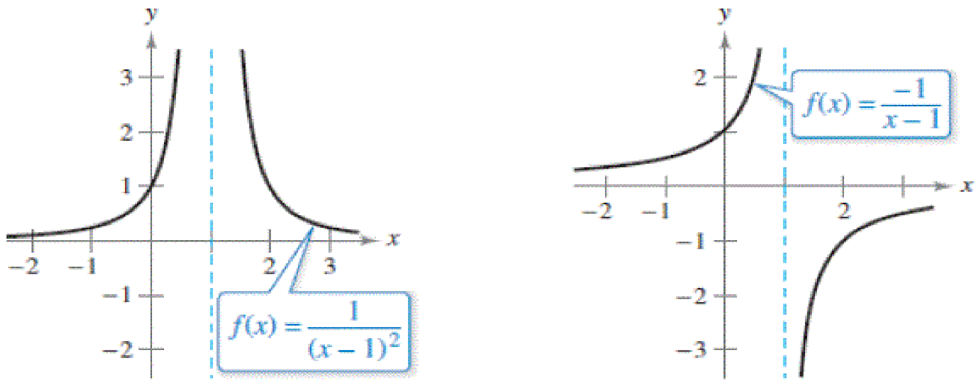
- نقول أن نهاية التابع f عند x_0 تساوي $-\infty$ إذا تحقق:

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A$$

ونرمز لها $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$



مثال: حدد نهاية كل من التوابع التالية الموضح خطها البياني أدناه, عندما x تسعى إلى الواحد من اليمين ومن اليسار



– نهاية التابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$: عندما $x \to 1$ سواء من اليمين أو اليسار, المقدار $(x-1)^2$ موجب ومتناهي في الصغر وعليه يكون المقدار $\frac{1}{(x-1)^2}$ موجب ومتناهي في الكبر, وبالتالي التابع f يسعى إلى اللانهاية الموجبة عندما $x \to 1$ من اليمين واليسار:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

– نهاية التابع $f(x) = \frac{-1}{x-1}$: عندما $x \to 1$ من اليسار فإن $(x-1)$ مقدار سالب صغير جداً وبالتالي $\frac{-1}{x-1}$ مقدار موجب لا متناهي في الكبر ونكتب $\lim_{2^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$

عندما $x \to 1$ من اليمين ر فإن $(x-1)$ مقدار موجب صغير جداً وبالتالي $\frac{-1}{x-1}$ مقدار سالب لا متناهي في الصغر ونكتب $\lim_{2^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

تعريف (المقارب العمودي)

إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ عندما $x \to x_0$ سواء من اليمين أو اليسار, عندئذ نقول عن $x = x_0$ مقارب عمودي للخط البياني للتابع f.

سنعطي المبرهنة التالية (سنعتمد على مفهوم الاستمرار الذي سنقدمه لكم في الفصل القادم بالتفصيل لكن مبدئياً سنعتمد على معلوماتك من دراستك السابقة)

مبرهنة:

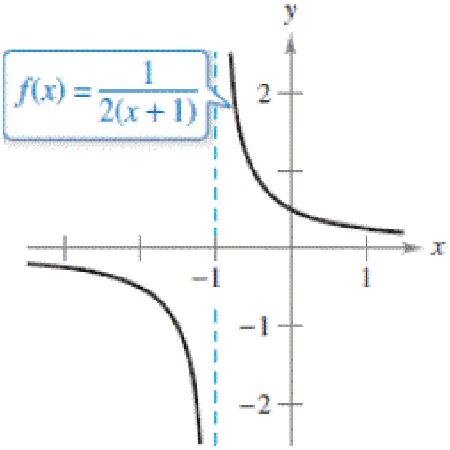
ليكن f, g تابعين مستمرين على مجال مفتوح يحوي x_0. إذا كان $f(x_0) \neq 0$ و $g(x_0) = 0$. إذا وجد مجال مفتوح يحوي x_0 بحيث $g(x) \neq 0$ من أجل جميع قيم المجال المغايرة ل x_0, وبالتالي الخط البياني للتابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ يقبل المستقيم $x = x_0$ مقارباً عمودياً .

مثال : حدد المقاربات العمودية لبيانات التوابع التالية:

$$f(x)=\frac{1}{2(x+1)},\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1},\quad f(x)=\cot x$$

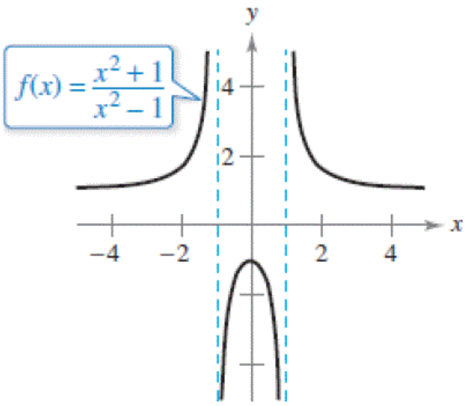
عند النقطة $x=-1$ مقام التابع $\frac{1}{2(x+1)}$ معدوم وبسطه غير معدوم.

وبالتالي حسب النظرية السابقة يمكن أن نستنتج أن المستقيم $x=-1$ مقارب عمودي للخط البياني للتابع f. كما هو مبين في الشكل المجاور



$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

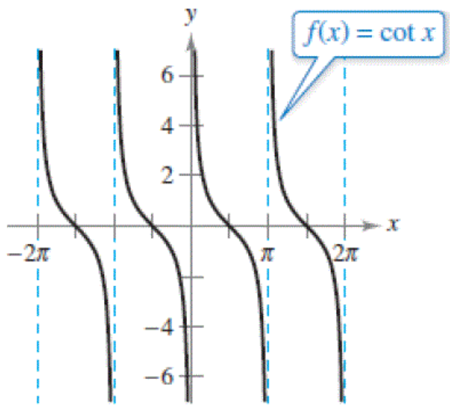
نلاحظ أن مقام التابع ينعدم عند $x=-1$ و $x=+1$ وبما أن البسط لا ينعدم عند هاتين القيمتين. حسب النظرية السابقة يقبل مقاربين عموديين هما $x=-1$ و $x=+1$ كما هو مبين بالشكل المجاور.



$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

القيم التي تعدم المقام $\sin x=0$ والتي هي $x=n\pi\ ;n\in\mathbb{Z}$, كما أن البسط لا ينعدم عند هذه القيم وبتطبيق النظرية السابقة.

نرى أن لدى بيان التابع مقاربات عمودية من الشكل $x=n\pi\ ;n\in\mathbb{Z}$



تشترط المبرهنة السابقة أن يكون بسط التابع المدروس لا ينعدم عند x_0, وإلا سنحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$,

لذلك قبل تطبيق النظرية السابقة يتوجب علينا إزالة عدم التعيين. سنوضح هذا الأمر في المثال التالي:

مثال: حدد المقاربات العمودية للخط البياني للتابع $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

لنبسط الكسر: $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} =$

$\frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+4}{x+2}; \quad x \neq 2$

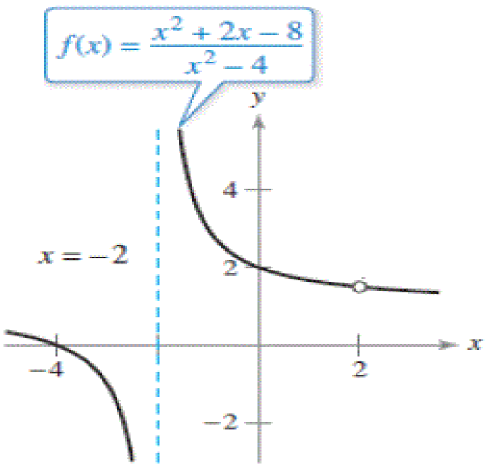
عند جميع نقاط التابع ماعدا $x = 2$

يتطابق الخط البياني للتابع f مع الخط

البياني للتابع $g(x) = \frac{x+4}{x+2}$, لنطبق

المبرهنة السابقة على g لنرى أن $x =$

-2 مقارب عمودي لبيان التابع.



من الشكل المجاور نرى أن: $\lim_{-2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{-2^+} f(x) = +\infty$.

لاحظ أن المستقيم $x = 2$ لا يمثل مقارب عمودي.

النهاية عند اللانهاية:

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على مجال من الشكل $I =]a, +\infty[$

تعريف:

- ليكن $l \in \mathbb{R}$, نقول عن f أنه يملك نهاية l عند $+\infty$ إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0 \ \forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

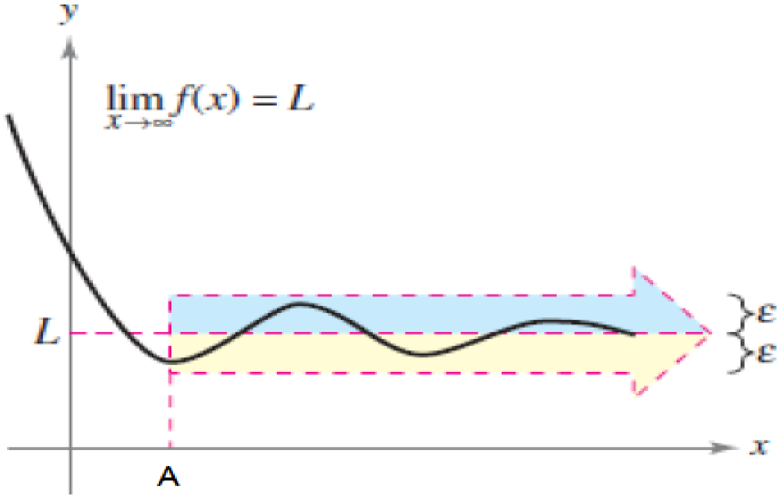
نرمز لها $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ أو $\lim_{+\infty} f = l$

- ليكن $l \in \mathbb{R}$, نقول عن f أنه يملك نهاية $+\infty$ عند$+\infty$ إذا تحقق:

$$\forall A > 0 \;\; \exists B > 0 \;\; \forall x \in I \quad x > B \Longrightarrow f(x) > A$$

نرمز لها $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ملاحظة: بنفس الطريقة نعرف النهاية عند ال $-\infty$ للتوابع المعرفة على مجالات من الشكل $]-\infty, a[$.



تعريف (المقارب الأفقي)

ندعو المستقيم $y = L$ مقارب أفقي للخد البياني للتابع f إذا تحقق:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

أمثلة:

- لدينا النهايات الكلاسيكية للتوابع التالية من أجل $n \geq 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & ; \quad n \text{ زوجي} \\ -\infty & ; \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- لتكن $a_n > 0$; $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x \;\; + a_0$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + .. + b_1 x \;\; + b_0; \;\; b_m > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

خصائص ومميزات النهايات:

اقتراح 1:

إذا امتلك التابع نهاية, عندئذ هذه النهاية وحيدة.

لن نعطي برهان هذه الاقتراح لتشابهه الكبير ببرهان وحدانية نهاية متتالية الذي سنقوم بدراسته في الفصل الأخير من كتابنا هذا ونذكر بأننا قمنا ببرهانه من خلال نقض الفرض.

ليكن لدينا التابعين f, g ولنفرض أن x_0 عدد حقيقي أو $x_0 = \pm\infty$

اقتراح 2 :

إذا كانت $\lim\limits_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot l, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f + g) = l + l'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = l \times l'$
- إذا كان $l \neq 0$, عندئذ $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$
- إذا كانت $\lim\limits_{x_0} f = +\infty (or - \infty)$, عندئذ $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

اقتراح 3:

إذا كانت $\lim_{x_0} f = l$ و $\lim_{x_0} g = l'$, عندئذ $\lim_{x_0} g \circ f = l'$

كل ما ذكر من خصائص عادة ما نستخدمها دون أن نلحظ ذلك.

مثال:

ليكن التابع $x \mapsto u(x)$ و $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث $u(x) \longrightarrow 2$ عندما $x \longrightarrow x_0$ لنضع $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u^2(x)} + \ln x}$,

أوجد نهاية التابع f عند x_0 إن وجدت:

- لدينا $u(x) \longrightarrow 2$ عندما $x \longrightarrow x_0$ عندئذ $u^2(x) \longrightarrow 4$ ومنه $\frac{1}{u^2(x)} \longrightarrow \frac{1}{4}$ عندما $x \longrightarrow x_0$.
- بنفس الشكل $u(x) \longrightarrow 2$ عندئذ في جوار x_0 $u(x) > 0$ وعليه $\ln u(x)$ معرف في هذا الجوار ويكون $\ln u(x) \longrightarrow \ln 2$ عند $x \longrightarrow x_0$.
- وعليه $1 + \frac{1}{u^2(x)} + \ln x \longrightarrow 1 + \frac{1}{4} + \ln 2$ عندما $x \longrightarrow x_0$, لدينا $1 + \frac{1}{u^2(x)} + \ln x \geq 0$ في جوار x_0.
- بالتركيب مع الجذر التربيعي يكون التابع f يملك نهاية عند x_0 ويكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$.

ملاحظة:

في بعض الحالات مثلاً عندما يكون $\lim_{x_0} f = +\infty$ و $\lim_{x_0} g = -\infty$ لا نستطيع الحكم على نهاية $f + g$. ندعو هذه الحالة $+\infty - \infty$ حالة عدم تعيين, كذلك لدينا حالات عدم تعيين بأشكال مختلفة نذكر الحالات: $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $1^{\infty}, \infty^0$

أخيراً سنقدم الاقتراح التالي الذي يبين كيفية تطبيق النهايات في المتراجحات:

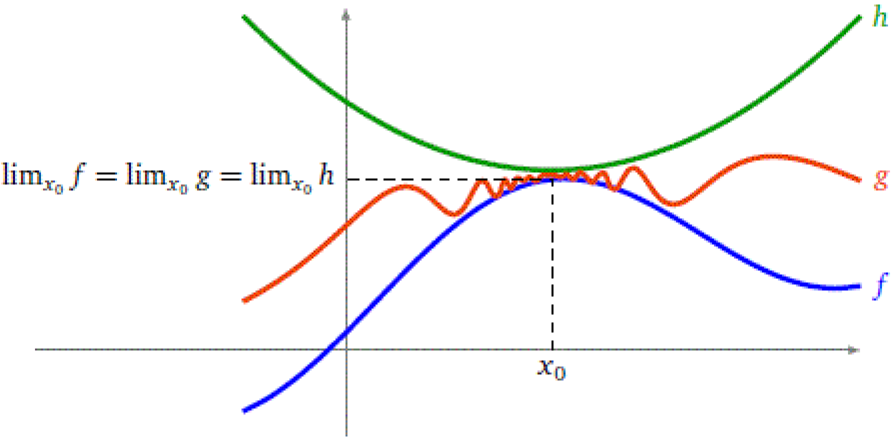
اقتراح 4:

إذا كانت $f \leq g$, وإذا كانت $\lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$ عندئذ $l \leq l'$

إذا كانت $f \leq g$, وإذا كانت $\lim_{x_0} f = +\infty$, عندئذ $\lim_{x_0} g = +\infty$

نظرية الإحاطة (Gendarme)

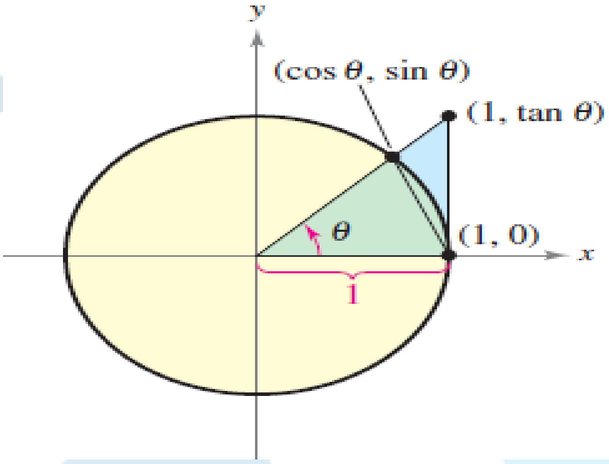
إذا كانت $h \le g \le f$, وإذا كانت $\lim_{x_0} h \in \mathbb{R}$ $\lim_{x_0} f = l =$, عندئذٍ $\lim_{x_0} g = l$

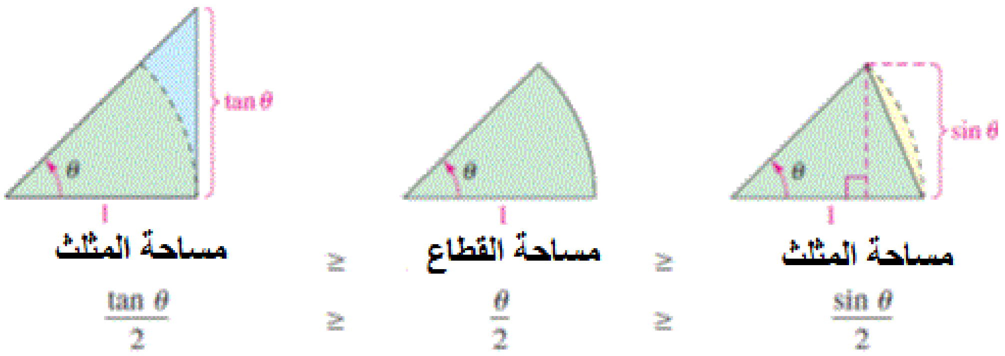


باستخدام نظرية جيندارم (الإحاطة) سنبرهن النهاية الشهيرة التالية:

أثبت أن

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$





نضرب المتراجحة أعلاه ب $\frac{2}{\sin\theta}$ ومنه : $1 \geq \frac{\theta}{\sin\theta} \geq \frac{1}{\cos\theta}$, ومنه

$$\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$

كون $\cos\theta = \cos(-\theta)$ و $\frac{\sin -\theta}{-\theta} = \frac{\sin\theta}{\theta}$ فإن المتراجحة السابقة صحيحة من أجل كل قيم θ ضمن المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, بما أن $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ و $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$ وبتطبيق نظرية جيندارم يكون $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

تطبيق مباشر: أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = 4\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\right) = 4\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 4(1) = 4$$

نظرية (التوابع التي تشترك في جميع النقاط ما عدا نقطة)

ليكن c عدد حقيقي, وليكن $f(x) = g(x)$ عند كل $x \neq c$ في مجال مفتوح يحوي النقطة c. عندئذ إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ موجودة عندئذ نهاية التابع f عند النقطة c موجودة و

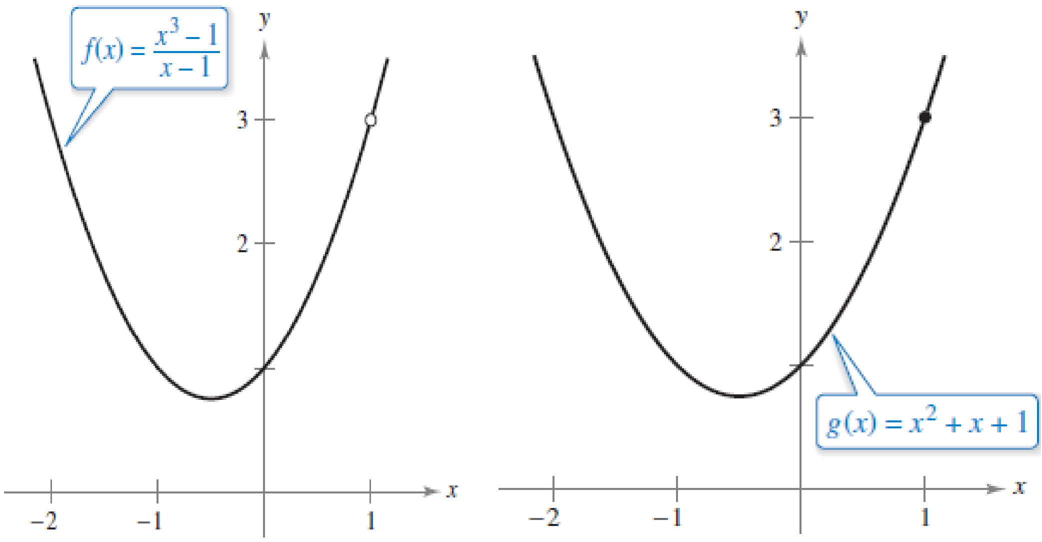
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$$

مثال: أوجد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

الحل:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = (x^2+x+1) = g(x)$$

لذلك من أجل جميع قيم x ماعدا $x = 1$ التابع f يساوي التابع g كما هو مبين بالشكل أدناه:



وبما أن $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ موجودة. نطبق النظرية السابقة ويكون

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} g(x)$$

وعليه:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3$$

مثال: أوجد $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$

على الرغم من أننا نوجد نهاية تابع كسري إلا أننا لا يمكننا التعويض المباشر لأن نهاية المقام تساوي الصفر.

$$\operatorname{Lim}_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x+3} \qquad \begin{matrix} \lim\limits_{x\to-3}(x^2+x-6) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-3}(x+3) = 0 \end{matrix}$$

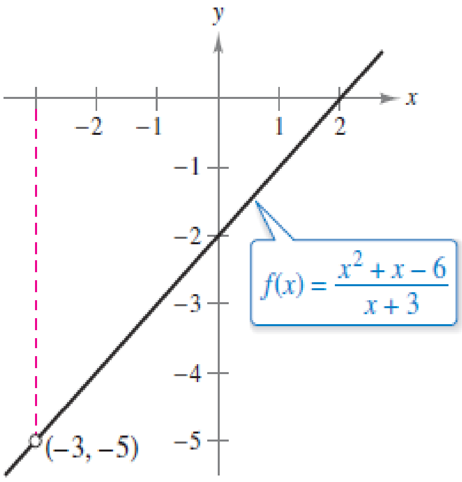
بما أن نهاية البسط كذلك تساوي الصفر, نرى أن :

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)} = x-2 = g(x)$$

هذه المساواة محققة من أجل كل $x \neq -3$

باستخدام المبرهنة السابقة نجد أن:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-2)=-5$$



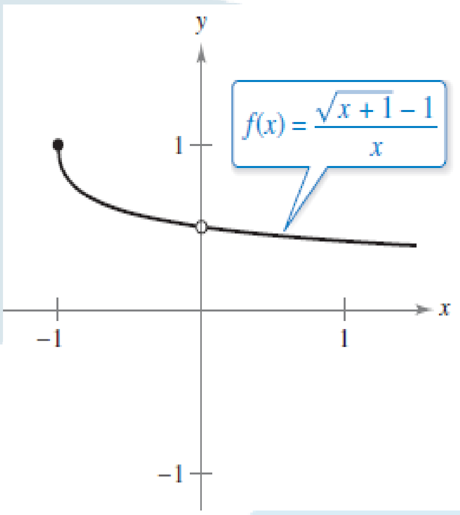
بالنظر إلى الشكل المجاور نلاحظ أن الخط البياني للتابع f ينطبق على الخط البياني للتابع $g(x)=x-2$، إلا أن الخط البياني للتابع f يملك انقطاع في النقطة $(-3,-5)$.

هناك حالات تدعى حالات عدم تعيين كمثالنا هذا $\frac{0}{0}$. تسمى بهذا الاسم أنه لا يمكننا تحديد قيمة النهاية. لذلك نلجأ لإعادة كتابة الكسر بحيث يكون المقام الجديد لا يسعى للصفر.

مثال : أوجد قيمة النهاية التالية: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0,\quad \lim_{x\to 0}(x)=0$$



لنعيد صياغة التابع بضرب البسط والمقام بمرافق البسط:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)$$

$$=\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\ ;x\neq 0$$

الآن نستطيع حساب النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

استمرار التابع في نقطة:

لنبدأ بعرض تعريف التابع المستمر في نقطة وهذا ما ندعوه توصيف فايرشتراس (Weierstrass) للاستمرار

ليكن I مجال ليس خالي $\mathbb{R}$ و $f: I\to\mathbb{R}$ تابع

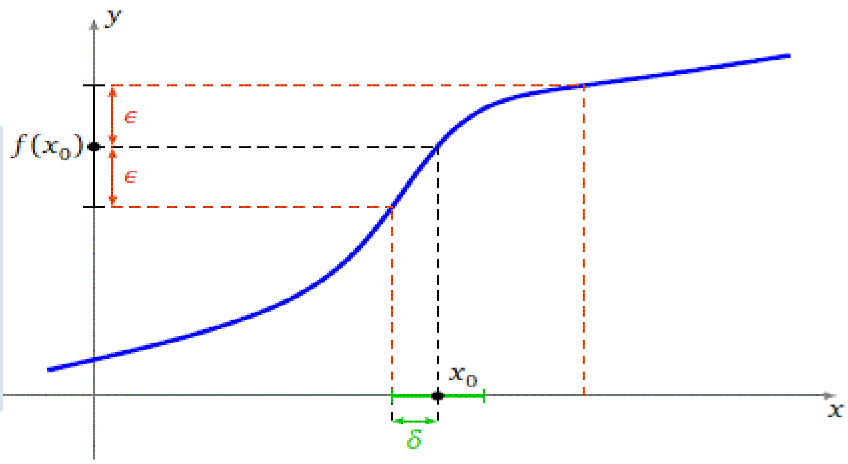
تعريف :

- نقول عن التابع f أنه مستمر في النقطة $x_0\in I$ إذا تحقق:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in I\quad |x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

  يعني أن f يقبل نهاية في x_0 وقيمتها بالضرورة تساوي $f(x_0)$.

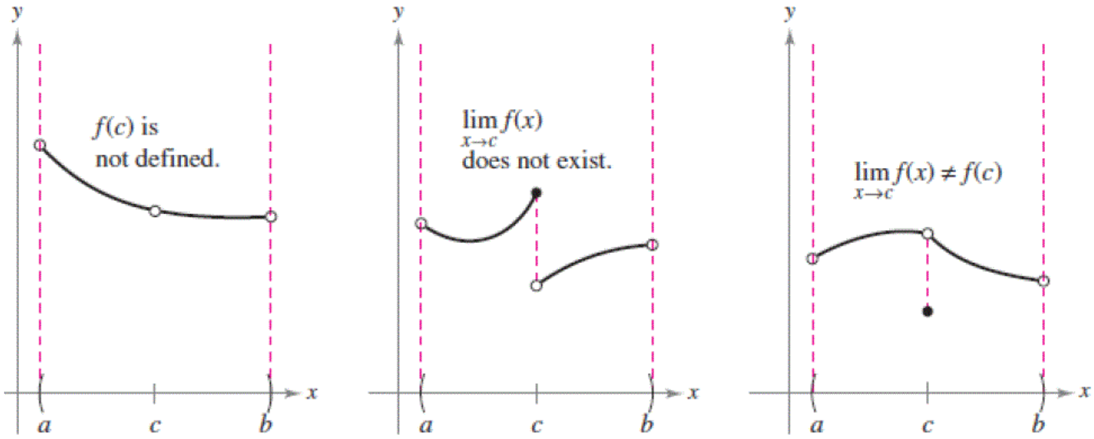
- نقول عن التابع f أنه مستمر على المجال I إذا كان مستمر في كل نقطة من نقاط المجال I.



بيانياً نقول عن التابع f أنه مستمر إذا استطعنا رسم بيانه دون رفع القلم, بكلام آخر بيانه لا يملك قفزات.

ملاحظة: العدد الحقيقي δ ليس متعلق ب ε فحسب, إنما بالعدد x_0

نبين فيما يلي بيانات توابع غير مستمرة عند x_0:



تعريف (النهاية والاستمرار):

ليكن I مجال ليس خالي و $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع

نقول عن التابع f أنه مستمر في النقطة $x_0 \in I$ إذا وفقط إذا تحقق :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.4 تعريف (الاستمرار من اليسار ومن اليمين):

ليكن I مجال ليس خالي و $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع

- نقول عن التابع f أنه مستمر من اليسار في النقطة $x_0 \in I$ إذا وفقط إذا تحقق : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- نقول عن التابع f أنه مستمر من اليمين في النقطة $x_0 \in I$ إذا وفقط إذا تحقق : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

تعريف الاستمرار على مجال مغلق:

نقول عن التابع f أنه مستمر على المجال المغلق $[a, b]$, إذا كان مستمراً على المجال المفتوح $]a, b[$ وكان $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. أي أن التابع مستمر من اليمين عند a ومن اليسار عند b.

مثال: ناقش استمرار التابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

الحل: مجموعة تعريف التابع f هي المجال المغلق $[-1,1]$

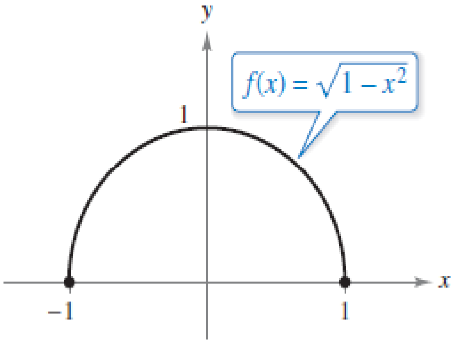
التابع مستمر على جميع نقاط المجال المفتوح $]-1,1[$, وبما أن

$$\lim_{x\to -1^{+}} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$$

(استمرار من اليمين) كذلك:

$$\lim_{x\to +1^{-}} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(+1)$$

(استمرار من اليسار) وبالتالي التابع مستمر على المجال المغلق



أمثلة:

- التابع الثابت $x \mapsto a;\ a \in \mathbb{R}$ مستمر على $\mathbb{R}$.
- التابع المطابق $x \mapsto x$ مستمر على $\mathbb{R}$.
- التابع القوى الصحيحة $x \mapsto x^n$ مستمر على $\mathbb{R}$ عندما $n \geq 0$, ومستمر على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ عندما $n \leq 0$.
- تابع الجذر النوني $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ مستمر على $\mathbb{R}^{+}$ عندما n زوجي وعلى $\mathbb{R}$ عندما n فردي.
- التوابع المثلثية $\sin, \cos$ مستمرة على كامل $\mathbb{R}$,

  $\tan$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- التوابع الزائدية مستمرة على $\mathbb{R}$.
- تابع القيمة المطلقة $x \longmapsto |x|$ مستمر على كامل $\mathbb{R}$.
- التابع الأسي $\exp$ مستمر على كامل $\mathbb{R}$.
- التابع اللوغاريتمي $\ln$ مستمر على $]0,+\infty[$
- تابع الجزء الصحيح E, غير مستمر عى النقاط $x_0 \in \mathbb{Z}$ لأنه لا يملك نهايات في هذه النقاط, بينما يكون مستمر على النقاط $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

ملاحظة: ليكن I مجال مفتوح يحوي النقطة c, إذا كان التابع معرف على I (من الممكن ما عدا c) وكان التابع غير مستمر عند c, عندئذ نقول أن للتابع انقطاع عند c. يصنف الانقطاع إلى صنفين أساسيين: انقطاع قابل للإزالة وانقطاع غير قابل للإزالة

نقول عن الانقطاع c أنه قابل للإزالة إذا أمكن جعل التابع مستمر بإعطائه قيمة مناسبة عند c.

ملاحظة: في الأشكال السابقة, بياني التابعين الأول والثالث يمثل كل منهما بيان تابع يملك انقطاع قابل للإزالة, أما البيان الأوسط فهو لتابع يملك انقطاع غير قابل للإزالة.

أمثلة: ناقش استمرارية كل من التوابع التالية:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & > 0 \end{cases} \qquad\qquad y(x) = \sin x$$

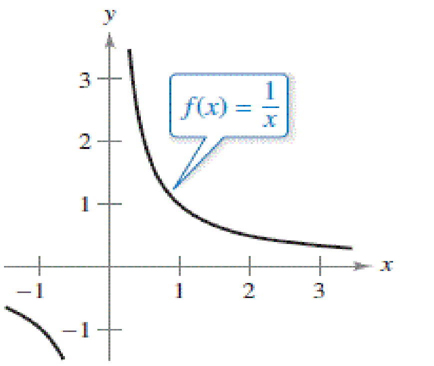
الحل:

1. مجموعة تعريف التابع f هي جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر , وبالتالي التابع مستمر على مجموعة تعريفه. عندما $x = 0$, فإن للتابع انقطاع غير قابلة للإزالة. (النهاية غير موجودة)

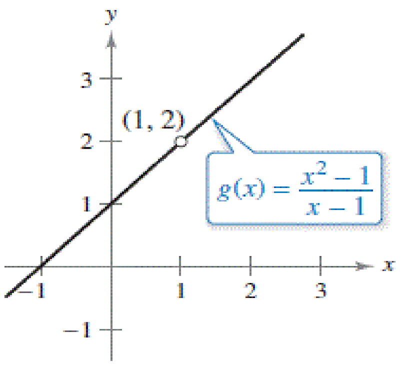
2. مجموعة تعريف التابع g هي جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الواحد, وبالتالي التابع مستمر على مجموعة تعريفه. عندما $x = 1$, فإن للتابع انقطاع قابلة للإزالة (لنعطي للتابع g قيمة عند الواحد ولتكن نهاية التابع عند الواحد), إذاً لنضع $g(1) = 2$, ويكون التابع الجديد مستمر على مجموعة الأعداد الحقيقي.

3. مجال تعريف التابع h هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملةً , التابع h مستمر على $]-\infty, 0[$ وعلى المجال $[0, +\infty[$, وبما أن $\lim_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0)$ وبالتالي التابع معرف على كامل $\mathbb{R}$.

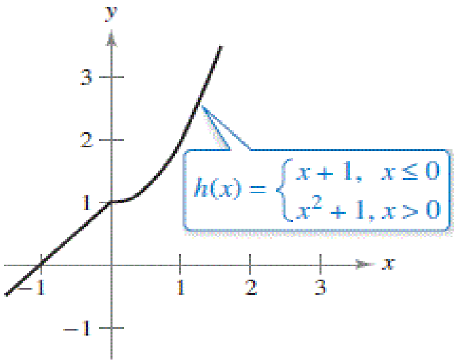
4. $y(x) = \sin x$ تابع مثلثي معرف ومستمر على كامل $\mathbb{R}$.

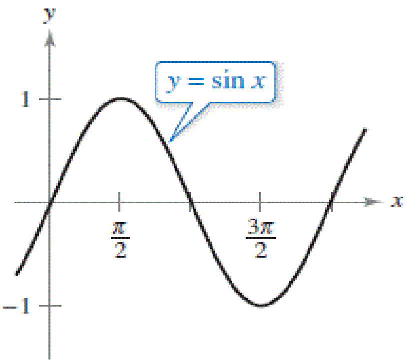


(a) $x = 0$ انقطاع غير قابل للإزالة عند



(b) $x = 1$ انقطاع قابل للإزالة عند



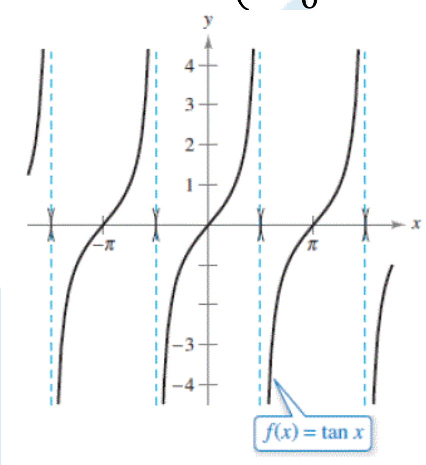


أمثلة: أوجد المجالات التي يكون عليها كل من التوابع التالية مستمراً

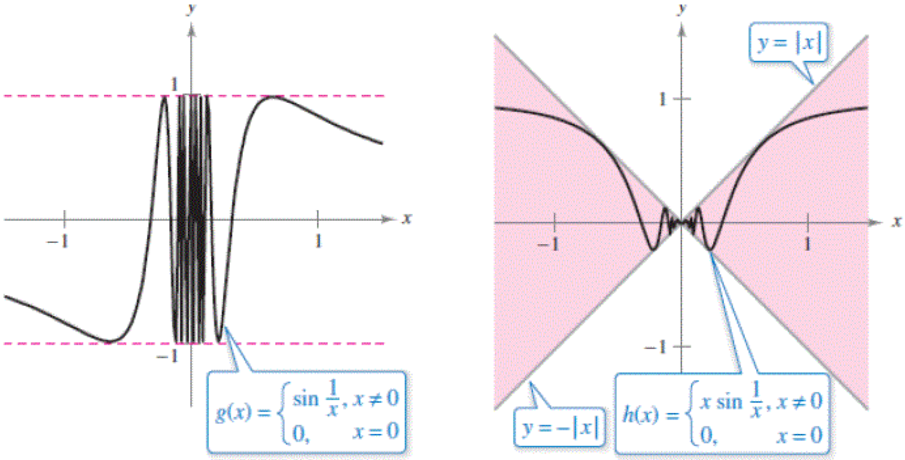
$$f(x)=\tan x\,,\qquad g(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

– التابع $f(x)=\tan x$ غير معرف عندما
$x=\frac{\pi}{2}+n\pi;\quad n\in\mathbb{Z}$ فيما عدا ذلك التابع
معرف ومستمر وبالتالي مجالات استمرار التابع
هي ...... , $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[, \left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$



- بما أن $y = \frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
والتابع $\sin x$ مستمر على كامل $\mathbb{R}$ وعليه يكون
التابع $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ مستمر على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$



عند $x = 0$ نهاية التابع غير موجودة وبالتالي مجالات استمرار التابع هي: $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$

- التابع h مشابه للتابع g إلا أن سعة الاهتزاز متعلقة ب x, وباستخدام مبرهنية الإحاطة لدينا:

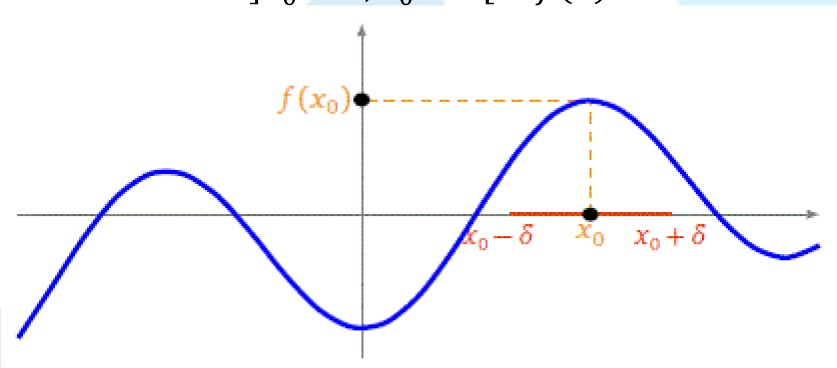
$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x| \quad ; \quad x \neq 0$$

4.5 خصائص الاستمرار:

لازمة1:

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على المجال I و x_0 نقطة من I. إذا كان f مستمر عند النقطة x_0 وكان $f(x_0) \neq 0$,
عندئذ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0$$



الاقتراحات التالية هي نتيجة مباشرة للاقتراحات المتعلقة بالنهايات.

اقتراح4:

ليكن $f,g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعين مستمرين في النقطة $x_0\in I$ عندئذ:

- $\lambda\cdot f$ مستمر عند x_0 $(\forall\,\lambda\in\mathbb{R})$
- $f+g$ مستمر عند x_0
- $f\times g$ مستمر عند x_0
- إذا كان $f(x_0)\neq 0$, عندئذ $\frac{1}{f}$ مستمر عند x_0.

أمثلة:

الاقتراحات السابقة تسمح بإثبات أن التوابع التالية مستمرة

- توابع القوى $x\mapsto x^n$ على $\mathbb{R}$ (تمثل جداءات $x\times x\times\ldots$)
- كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$
- التوابع الكسرية $x\mapsto\frac{P(x)}{Q(x)}$ مستمرة على كل مجال لا ينعدم فيه $Q(x)$.

اقتراح 5:

ليكن $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ و ليكن $g:J\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعين وكان $f(I)\subset J$, إذا كان f مستمر عند النقطة $x_0\in I$ و g مستمر عند $f(x_0)$, عندئذ $g\circ f$ مستمر عند x_0 و $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)=g(x_0)$

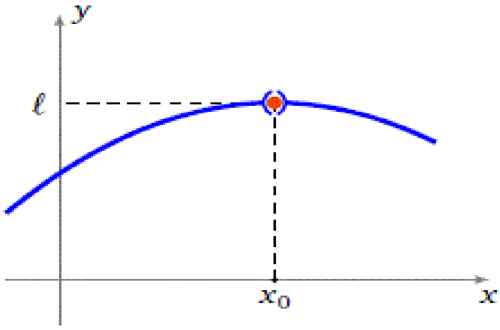
4التمديد بالاستمرارية:

تعريف : ليكن I مجال و x_0 نقطة من I, و كان $f:I\backslash\{x_0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع:

- نقول عن f أنه قابل للتمديد بالاستمرارية عند x_0 إذا ملك نهاية منتهية عند x_0 , نرمز لها $l=lim_{x_0}f$.
- نعرف التابع $\tilde{f}:I\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x) & ;x\neq x_0\\ l & ;x=x_0\end{cases}$$

ويكون التابع $\tilde{f}$ مستمراً عند x_0.



مثال:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالشكل التالي $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, لنرى فيما إذا كان التابع قابل للتمديد بالاستمرارية عند الصفر؟

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $|f(x)| \leq |x|$ ومنه نستنتج أن f تسعى للصفر عندما x تسعى للصفر, وبالتالي يكون التابع قابل للتمديد بالاستمرارية عند الصفر ونعرف التابع $\tilde{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المستمر بالشكل:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

4.8 الاستمرار على مجال :

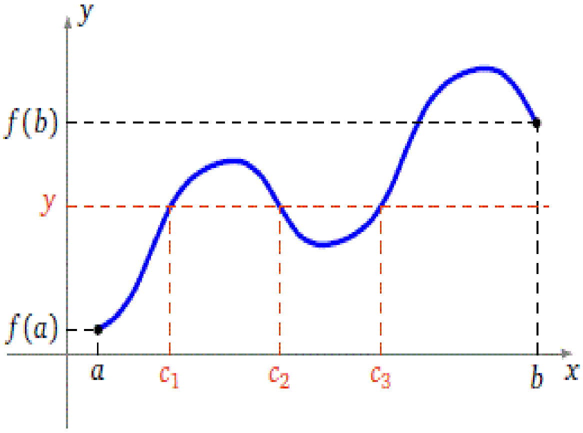
4.9 نظرية القيم الوسطى:

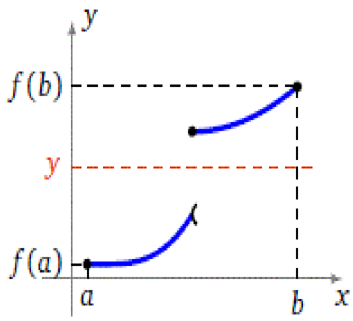
نظرية1: نظرية القيم الوسطى

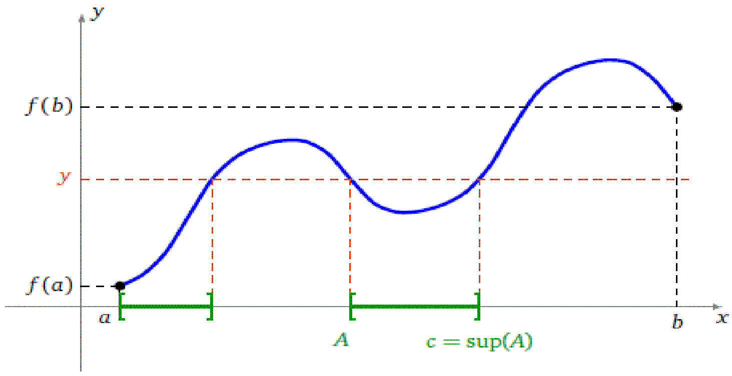
ليكن $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع مستمر على القطعة $[a,b]$

من أجل أي عدد حقيقي y بين $f(a)$ و $f(b)$, يوجد $c \in [a,b]$ بحيث $f(c) = y$

أدناه نبين تمثيلاً بيانياً لنظرية القيم الوسطى, نرى أن القيمة c ليس بالضرورة أن تكون وحدة. فوق ذلك إذا كان التابع غير مستمر تكون النظرية غير صحيحة.







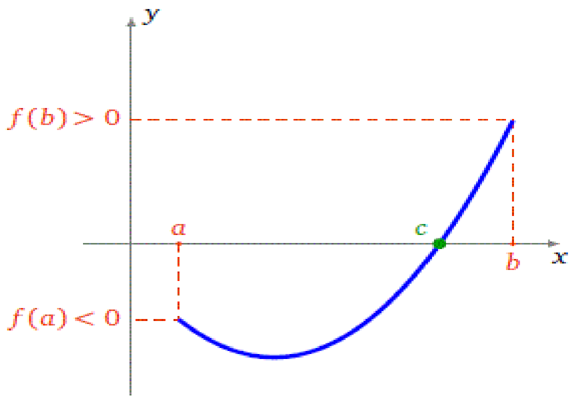
تطبيقات نظرية القيمة الوسطى:

النسخة التالية من نظرية القيم الوسطى هي الأكثر استخداماً في التطبيقات.

نتيجة: (نظرية بولزانو **Bolzano)**

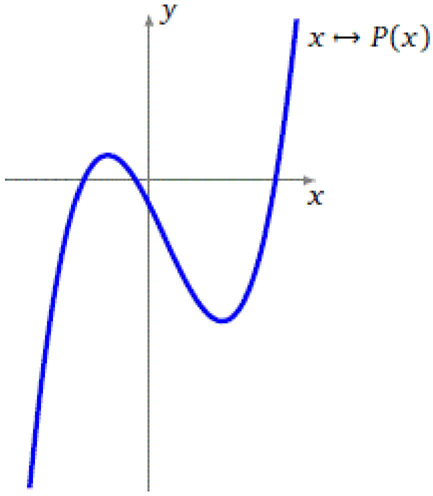
ليكن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع مستمر على القطعة $[a,b]$, إذا كان

$f(a)\cdot f(b)<0$, عندئذ يوجد $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=0$



مثال:

كثيرة الحدود من درجة فردية تملك على الأقل جذر حقيقي.



كثيرة الحدود تكتب بالشكل $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ مع n عدد فردي و $a_n > 0$. لدينا $\lim_{+\infty} P = +\infty$ و $\lim_{-\infty} P = -\infty$, بشكل خاص يوجد عددين حقيقيين a, b بحيث $P(a) > 0$ و $P(b) < 0$, ومنه نستنتج حسب نظرية القيمة الوسطى أنه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $f(c) = 0$.

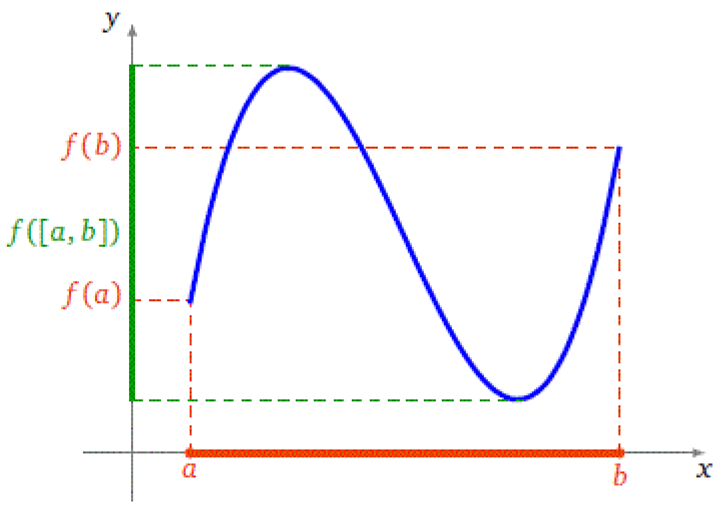
نتيجة 2: (نظرية ل فايرشتراس Weierstrass)

لتكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابع مستمر على المجال I. عندئذ $f(I)$صورة المجال I وفق f تمثل مجال. بكلام آخر:

يوجد عددين حقيقين $c_1, c_2 \in I$ بحيث يتحقق أنه من أجل كل $x \in I$

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

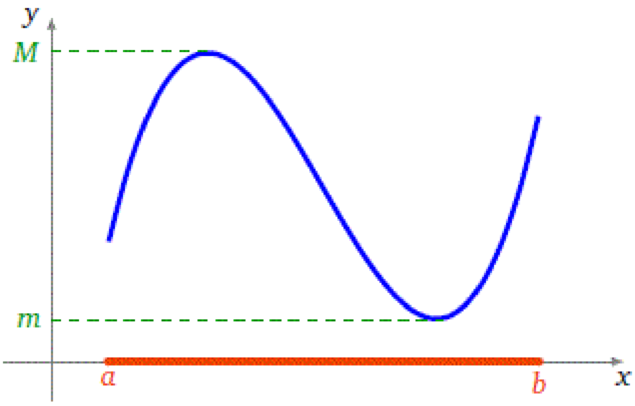
انتبه: من الخطأ الاعتقاد أن صورة المجال $[a, b]$ وفق f هي المجال $[f(a), f(b)]$, البيان أدناه بين ذلك.



التوابع المستمرة على قطعة مستقيمة:

نظرية 2:

لتكن $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ تابع مستمر على القطعة $[a, b]$, عندئذ يوجد عددين حقيقيين $m, M \in \mathbb{R}$ بحيث $f([a, b]) = [m, M]$. بكلا م آخر صورة القطعة المستقيمة وفق تابع مستمر هي قطعة مستقيمة.



نحن نعلم من نظرية القيم الوسطى أن صورة مجال وفق تابع مستمر هو مجال وبالتالي هذه النظرية تعني بالضبط أن :

إذا كان f مستمر على $[a, b]$, عندئذ f محدود على المجال $[a, b]$ ويبلغ حدوده.

وبالتالي m تمثل الحد الأدنى للتابع f على المجال $[a, b]$, M تمثل الحد الأعلى.

اقتراح (الاستمرار والاضطراد)

ليكن f تابع مضطرد على المجال I المحتوى في $\mathbb{R}$ بحيث $f(I)$ (صورة المجال I وفق التابع f) أيضاً مجال, عندئذ يكون التابع f مستمر.

4.10 التوابع المضطردة والتقابل:

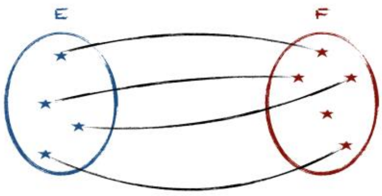
تعريف:

ليكن التابع $f : E \to F$, حيث E, F مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$

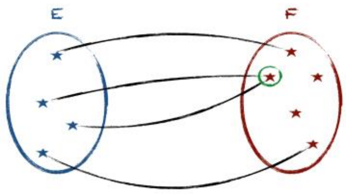
- f متباين إذا كان: $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- f غامرإذا كان: $\forall y \in F \quad \exists x \in E; \quad y = f(x)$
- f تقابل إذا كان غامر ومتباين في آن معاً. أي

$$\forall y \in F \quad \exists!\, x \in E; \quad y = f(x)$$

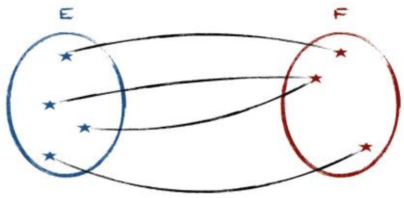
متباين



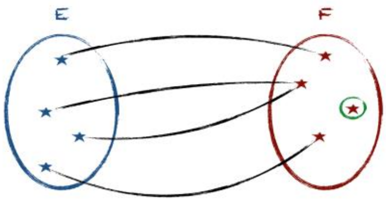
غير متباين



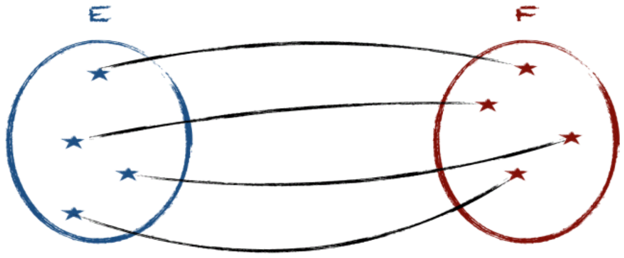
غامر



ليس غامر



تقابل



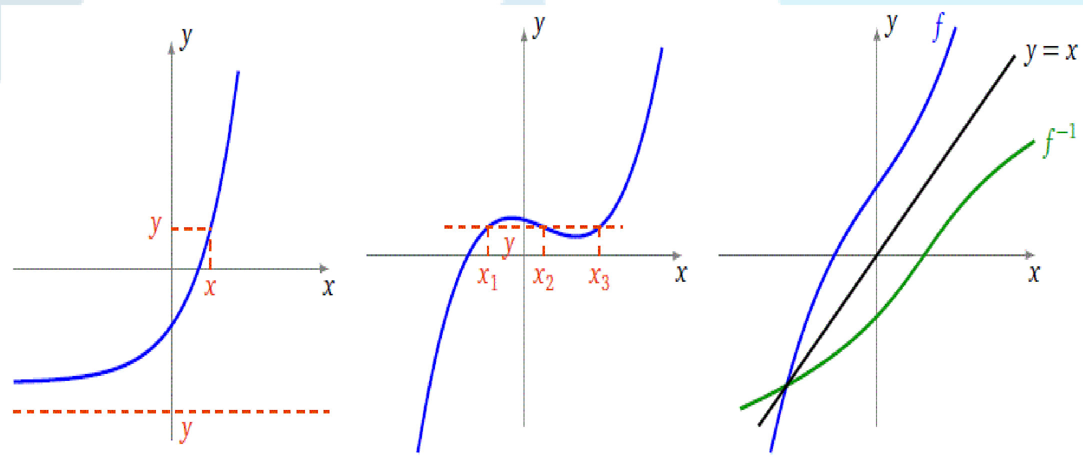
اقتراح:

إذا كان $f: E \to F$ تابع تقابل, عندئذ يوجد تطبيق وحيد $g: F \to E$ يحقق $g \circ f = id_E$ و $f \circ g = id_F$, يدعى التابع g بالتابع العكسي ل f ونرمز له f^{-1}.

ملاحظة:

- نذكر أن التابع المطابق عرف بالشكل: $id_E: E \to E\ ;\ \ x \longmapsto x$
- $g \circ f = id_E$ يمكن كتباتها بالشكل: $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$
- $f \circ g = id_F$ يمكن كتباتها بالشكل: $\forall x \in E \quad f\big(g(x)\big) = x$
- بياني التابعين f^{-1} و f متناظرين بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث.

نبين أدناه بدءاً من اليسار بيان تابع متباين وغامر وبيان تابع تقابل مع تقابله العكسي.



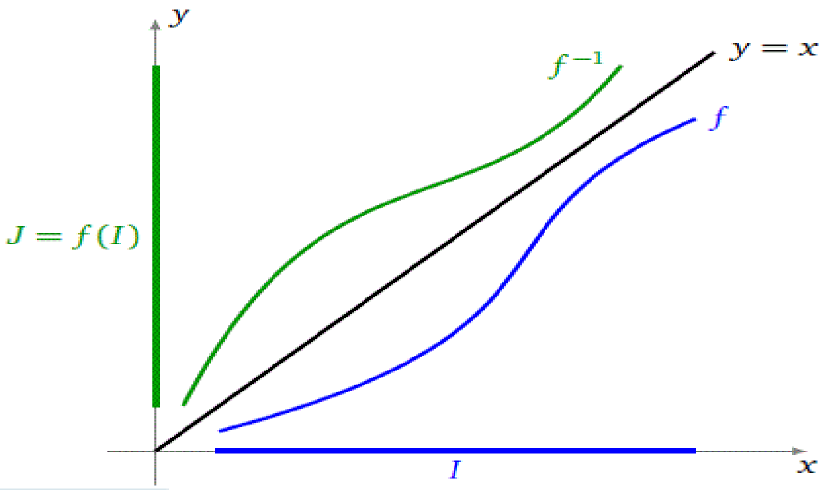
التوابع المضطردة والتقابل:

النظرية التالية هامة جداً لتبيان فيما إذا كان التابع تقابل.

نظرية (التقابل)

ليكن التابع $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف على I المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}$, إذا كان f مستمر ومضطرد تماماً على I عندئذ:

1. يكون $f: I \to f(I) = J$ تقابل.
2. التابع العكسي $f^{-1}: J \longrightarrow I$ مستمر ومضطرد تماماً ويكون f^{-1} وf متزايدان أو متناقصا معاً.



عملياً: إذا أردنا تطبيق هذه النظرية على التابع المستمر $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ نقصر التابع f على مجالات جزئية من I حيث يكون التابع مضطرد تماماً .

مثال:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = x^2$, التابع f ليس مضطرد تماماً على $\mathbb{R}$, حتى أنه ليس متباين حيث أن العدد ومعاكسه يملكان نفس الصورة. نأخذ التابعين التاليين: بقصر التابع f على المجال الجزئي $]-\infty, 0]$ نعرف التابع f_1 و بقصر التابع f على المجال الجزئي $[0, +\infty[$ نعرف التابع f_2 بالشكل:

$$f_1: \begin{cases}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \qquad f_2: \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

نلاحظ أن $[0,+\infty[= f([0,+\infty[) = f(]-\infty,0])$, بتطبيق النظرية السابقة نجد أن كل من التابعين f_1, f_2 تقابل وبالتالي تملك تقابل عكسي معرف بالشكل:

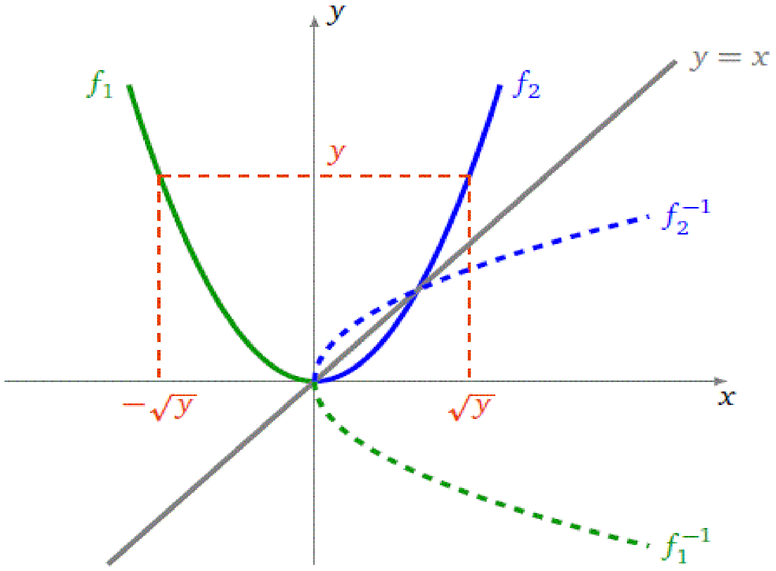
$$f_1^{-1}:[0,+\infty[\to]-\infty,0] \text{ و } f_1^{-1}:[0,+\infty[\to [0,+\infty[$$

ليكن x, y عددين حقيقيين بحيث $y \geq 0$ لدينا:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad or \quad y = -\sqrt{y}$$

يعني أن y صورة لعنصرين مختلفين أحدهما من $]0,+\infty[$ والآخر من $[0,+\infty[$ وبالتالي $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ و $f_2^{-1}(y) = +\sqrt{y}$

التوابع f_1^{-1} و f_1 لهما نفس جهة التغيير وكذلك الأمر بالنسبة ل f_2^{-1} و f_2 وأيضاً بياني التابع والتابع العكسي متناظرين بالنسبة لمنصف الربعين الأول والثالث.



مثال:

تعميم المثال السابق:

من أجل $n \geq 1$, وليكن $f \ : [0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$ معرف بالشكل $f(x) = x^n$. التابع مستمر ومتزايد تماماً كذلك $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ فهو تقابل ويملك تقابل عكسي f^{-1} معرف بالشكل $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ (أو $(x \longmapsto \sqrt[n]{x}$: الجذر النوني وهو كذلك تابع مستمر ومتزايد تماماً.

لازمة:

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع معرف على I ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ (ليس بالضرورة مستمر). إذا كان f مضطرد تماماً على I, عندئذ يكون f متباين.