الفصل الثالث – الاشتقاق

يعتبر هذا الفصل امتداد منطقي لما درسناه سابقاً من تعريف للتابع الحقيقي ودراسة نهايته واستمراره, حيث أصبح بإمكاننا الآن التركيز على جانب هام من التحليل الرياضي وهو الاشتقاق. حيث تم تطوير الجانب النظري والتطبيقي لهذا العلم على حد سواء منذ بدء تأسيسه في القرن السابع عشر من قبل العالمين نيوتن ولايبنيز.

الاشتقاق

مشتق تابع في نقطة

تعريف (مشتق تابع في نقطة):

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع و $x_0 \in I$, يكون f قابل للاشتقاق عند x_0 إذا كان التابع التالي (الذي يدعى معدل التغير) المعرف بالشكل:

$$g: I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

يملك **نهاية منتهية l عندما x تسعى ل x_0.**

في هذه الحالة نرمز للنهاية l بالشكل التالي:

$$l = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

العدد $f'(x_0)$ يمثل قيمة مشتق التابع f عند النقطة x_0.

تعريف (المشتق من اليمين والمشتق من اليسار)

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع و $x_0 \in I$ (أو أحد طرفي المجال I)

1. نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق من اليمين عند x_0 إذا كان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية من اليمين عندما x تسعى إلى x_0 بقيم أكبر.

2. نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كان $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية من اليسار عندما x تسعى إلى x_0 بقيم أصغر.

تعريف(الاشتقاق على مجال):

يكون f قابل للاشتقاق على المجال I إذا كان قابل للاشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in I$, التابع $x \mapsto f'(x)$ مشتق التابع f, ونرمز له f' أو $\frac{df}{dx}$.

مثال:

سنبين أن مشتق التابع $f(x) = \sin x$ هو $f'(x) = \cos x$

سنستخدم خلال البرهان الحقائق التالية:

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1; x \to 0$$

حالة1: عندما $x = 0$ لدينا:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - 0}{x - 0} \longrightarrow 1; x \to 0$$

وهذا يعني أن f قابل للاشتقاق عند $x_0 = 0$ و $f'(0) = 1$

حالة2: عندما x_0 كيفي مغاير للصفر:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin\frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}$$

عندما تسعى x إلى x_0 : $\cos\frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0$, لنضع $u = \frac{x-x_0}{2} \to 0$ وعليه يكون $\frac{\sin u}{u} \to 1$. بالنتيجة: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \cos x_0$, بالتعميم $f'(x) = \cos x$

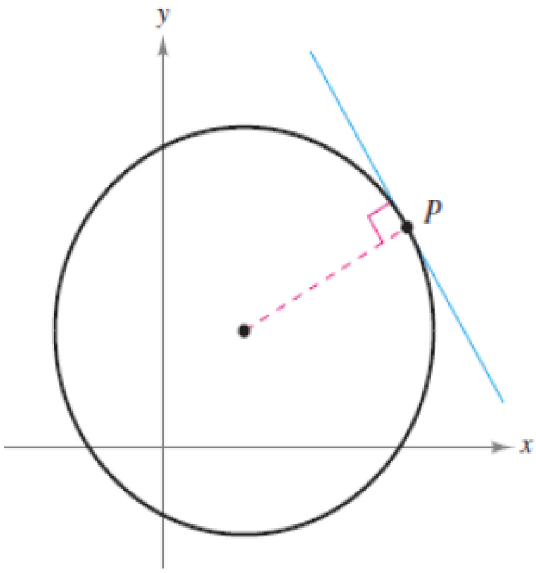
مسألة المماس:

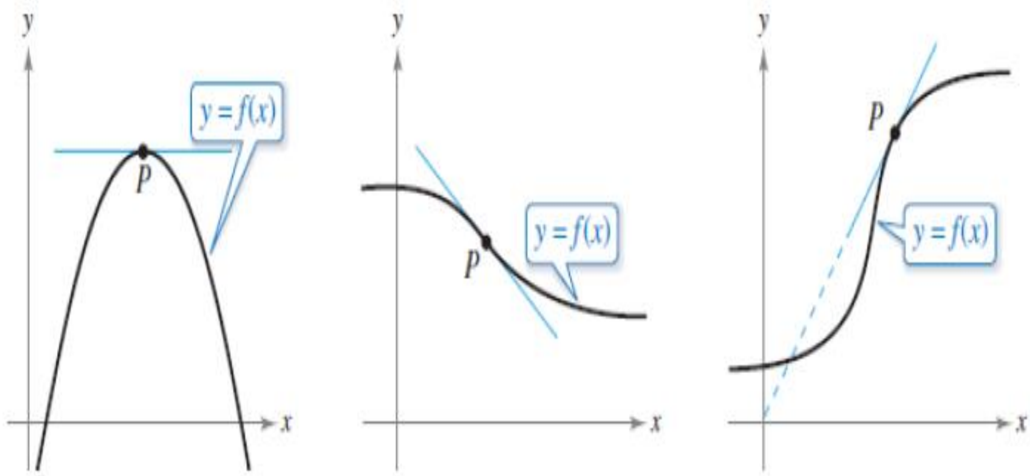
عندما نقول إن مستقيم ما هو مماس لمنحني عند نقطة ما، فماذا نقصد بذلك؟

بالنسبة للدائرة, فإن المماس في نقطة ما p, هو المستقيم العمود على نصف القطر في هذه النقطة

أما بالنسبة لمنحي ما, فإن المسألة تصبح أكثر صعوبة. على سبيل المثال لنحدد المماس للأشكال المبينة أدناه.

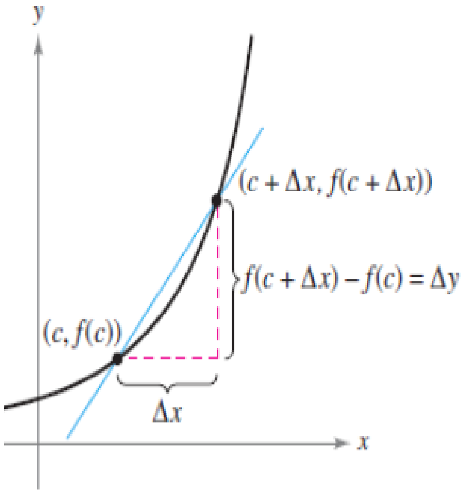
أول ما نفكر به عند محاولتنا تحديد المماس لمنحني في نقطة ما p أنه المستقيم الذي يلامس المنحني ولا يقطعه. هذا الكلام قد يكون صحيح في بعض الحالات مثلاً من أجل الشكل أقصى اليسار أدناه إلا أنه غير صحيح بالنسبة للشكل في الوسط.





أو من الممكن القول أن المستقيم مماس للمنحني إذا كان هذا المستقيم يلامس أو يقطع المنحني في نقطة واحدة فقط. هذا التعريف مقبول في بعض المنحنيات مثل الدائرة ولكن ليس لجميع المنحنيات كما هو مبين في الشكل أعلاه أقصى اليمين.

عملياً , مسألة تحديد مماس منحني في نقطة ما p تؤول إلى إيجاد ميل المماس في هذه النقطة.

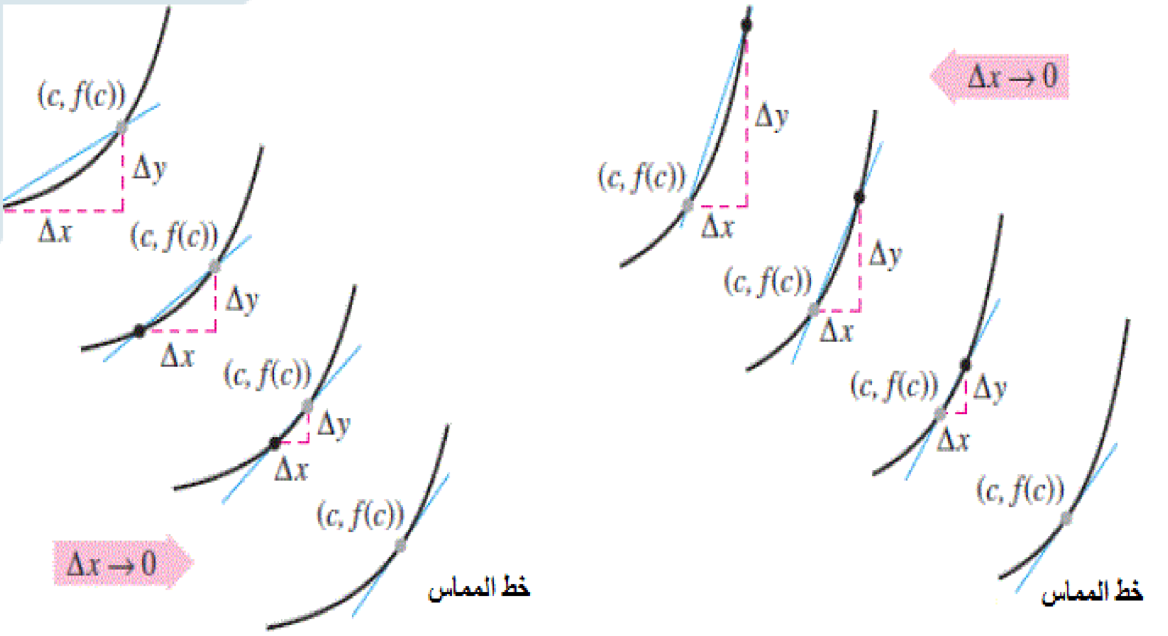


بإمكاننا تقريب هذا الميل باستخدام المستقيم القاطع للمنحني ف نقطتين إحداهما النقطة p والأخرى أي نقطة من المنحني كما هو مبين في الشكل.

إذا كانت نقطة التماس هي $(c, f(c))$ والنقطة الأخرى هي $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ فإن ميل القاطع المار بهاتين النقطتين هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

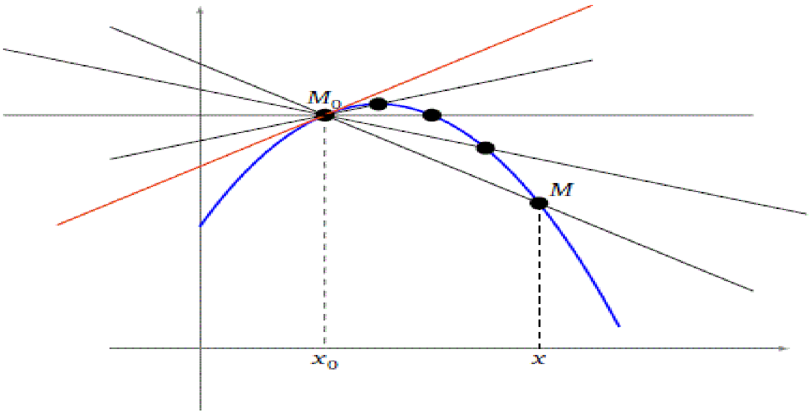
كلما اخترنا نقطة التقاطع الثانية أقرب إلى نقطة التماس كلما حصلنا على قيمة أدق لميل المماس.



تعريف المماس:

ليكن لدينا تابع f معرف على مجال مفتوح يحوي c. المماس هو المستقيم الذي يمر بالنقاط $(x, f(x))$ و$(x_0, f(x_0))$ بميل $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, بأخذ النهاية نجد أن ميل المماس هو $f'(x)$. وعليه معادلة المماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ تكون:

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$



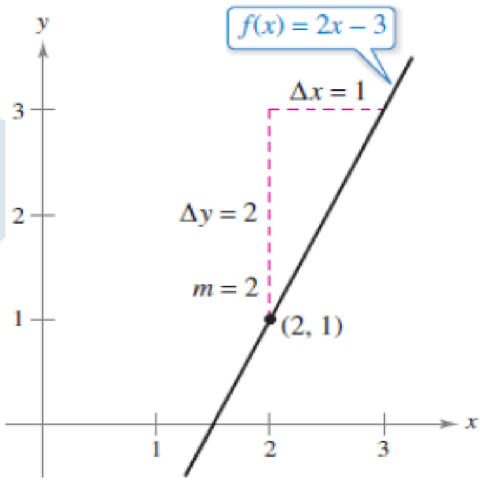
مثال:

أوجد ميل الخط البياني للتابع $f(x) = 2x - 3$ عند النقطة $(2,1)$

الحل:

لإيجاد ميل مماس منحني التابع عند النقطة $c = 2$

نطبق تعريف ميل المماس كما يلي:



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2(2+\Delta x)-3)-(2(2)-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2 = 2$$

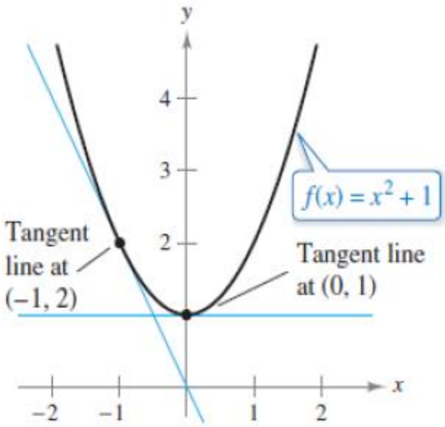
مثال:

أوجد ميل مماس منحني التابع

$f(x) = x^2 + 1$

في كل من النقطتين $(-1,2), (0,1)$

الحل: لتكن $(x_0, f(x_0))$ تمثل نقطة ما من منحني التابع وبالتالي يعطى ميل المماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ بالعلاقة:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x_0 + \Delta x)^2 + 1) - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + 1) - x_0^2 - 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

وبالتالي الميل في النقطة $(0,1)$ هو $m_1 = 2(0) = 0$ و الميل في النقطة $(-1,2)$ هو $m_1 = 2(-1) = -2$.

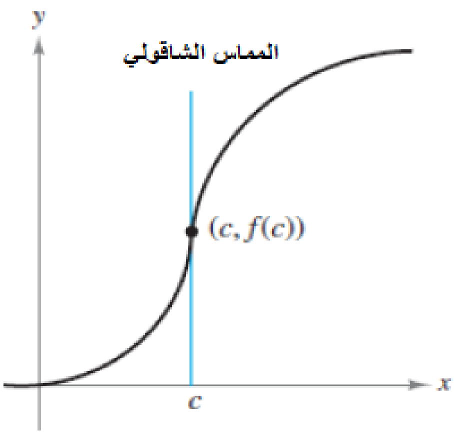
التعريف السابق للمماس لا يشمل حالة المماس الشاقولي

تعريف:

إذا كان التابع مستمر عند النقطة c وكان $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = +\infty$ أو $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$

عندئذ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = c$ والذي يخترق منحنى التابع في النقطة $\left(c, f(c)\right)$ يسمى المماس الشاقولي لمنحني التابع .

على سبيل المثال منحني التابع المبين جانباً يقبل مماساً شاقولياً في النقطة $\left(c, f(c)\right)$



اقتراح2:

ليكن I مجال مفتوح و $x_0 \in \mathbb{R}$ وليكن التابع $f: I \to \mathbb{R}$

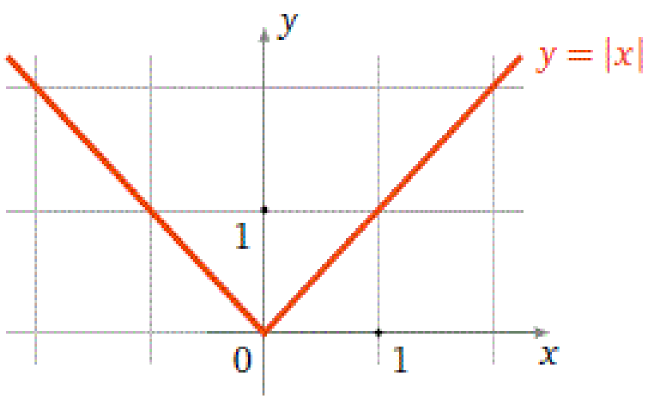
- إذا كان f قابل للاشتقاق عند x_0, عندئذ f مستمر عند x_0.
- إذا كان f قابل للاشتقاق على I, عندئذ f مستمر على I.

ملاحظة:

العكس خاطئ, وسنبين ذلك من خلال مثال.

مثال :

تابع القيمة المطلقة مستمر عند الصفر ولكنه غير قابل للاشتقاق عند الصفر.



حيث معدل التغير ل $f(x) = |x|$ في النقطة $x_0 = 0$ ويحقق:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1 & ;x>0\\ -1 & ;x<0\end{cases}$$

وبالتالي النهاية من اليمين (التي تساوي $+1$) والنهاية من اليسار (التي تساوي -1) غير متساويتين. وبالتالي لا يوجد نهاية عند الصفر والتابع غير قابل للاشتقاق عند الصفر.

كذلك نستطيع التحقق من ذلك من خلال بيان التابع المبين أعلاه: يوجد نصف مماس على اليمين ونصف مماس على اليسار ولكنهما ذوات اتجاهين مختلفين.

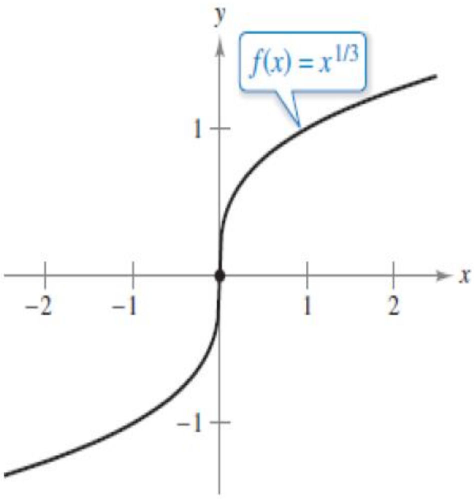
مثال:

التابع $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ مستمر عند $x=0$

ولكن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$

ومنه المماس عند $x=0$ شاقولي وبالتالي التابع غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.



تطبيقات معدل التغير:

من الاستخدامات الشائعة لمعدل التغير وصف حركة جسم متحرك بحركة مستقيمة, في مثل هذه المسائل عادةً نستخدم إما مستقيم عمودي أو أفقي, ونحدد عليه مبدأ لتمثيل مسار الحركة. إذا كانت الحركة باتجاه اليسار من المستقيم (أو الأسفل من المستقيم) يعتبر اتجاه الحركة سالباً , أما إذا كانت الحركة باتجاه اليمين من المستقيم (أو الأعلى من المستقيم) يعتبر اتجاه الحركة موجباً .

التابع s الذي يعطي موضع المتحرك (بالنسبة للمبدأ) كتابع للزمن t, ويسمى تابع الموضع.

فإذا تغير موضع المتحرك هذا بعد فاصل من الزمن Δt بالمقدار

$\Delta s = s(t + \Delta t)$, عندئذ تعطى السرعة الوسطية بالعلاقة التالية:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{تغيرالمسافة}}{\text{تغيرالزمن}}$$

مثال: بفرض كرة سقطت من ارتفاع 100 متر, ارتفاعها s مقدر بالأمتار في اللحظة t المقدرة بالثواني يعطى بالعلاقة $s(t) = -16t^2 + 100$. أوجد السرعة الوسطى للكرة على كل من المجالات التالية:

- ضمن المجال $[1,2]$ تسقط الكرة من الارتفاع

$s(1) = -16(1)^2 + 100 = 84\ m$ إلى الارتفاع

$s(2) = -16(2)^2 + 100 = 36\ m$ وبالتالي السرعة الوسطى $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{36-84}{2-1} = -48\ m^2$

- بنفس الطريقة على المجال $[1,1.5]$ تكون $\frac{\Delta s}{\Delta t} == -40\ m^2$
- وأخيراً على المجال $[1,1.1]$ تكون $\frac{\Delta s}{\Delta t} == -33.6\ m^2$

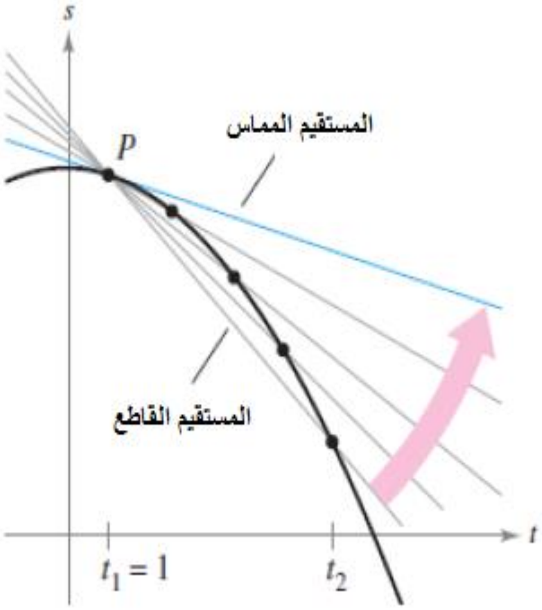
لاحظ أن السرعة الوسطى سالبة وبالتالي وهذا دليل على أن الجسم يتحرك نحو الأسفل.

أما إذا أردنا حساب السرعة الآنية (السرعة) للجسم المتحرك في لحظة ما ولتكن $t = 1$, كما هو الحال عندما قربنا ميل المماس باستخدام المستقيم القاطع. بأسلوب مشابه سنحصل على السرعة الآنية عند اللحظة $t = 1$ بأن نوجد السرعة الوسطى على مجال صغير $[1,1 + \Delta t]$. بأخذ نهاية السرعة الوسطى عندما يتناهى Δt إلى الصفر نحصل على السرعة الآنية.

بشكل عام, إذا كان $s = s(t)$ تابع الموضع لجسم يتحرك على مسار مستقيم وتكون سرعة المسار في هذه اللحظة:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

بكلام آخر: تابع السرعة يمثل مشتق تابع الموضع, يمكن لتابع السرعة أن يأخذ قيم موجبة أو سالبة أو معدومة, وتكون السرعة هي القيمة المطلقة لتابع السرعة وهي دائماً موجبة.



تابع الموضع لجسم يسقط سقوط حر تحت تأثير الجاذبية الأرضية وبإهمال تأثير مقاومة الهواء يعطى بالعلاقة: $s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$ حيث:

g تسارع الجاذبية, v_0 السرعة الابتدائية , s_0 الارتفاع الابتدائي للجسم.

مثال:

في اللحظة $t = 0$ قفز غطاس من منطقة ارتفاعها 32 متر من سطح الماء, موضع الغطاس يعطى بالعلاقة: $s(t) = -16\, t^2 + 16\, t + 32$ حيث s مقدرة بالأمتار و t بالثواني. متى يصطدم الغطاس بالماء؟ وما هي سرعتها عندها؟

الحل:

لإيجاد لحظة الاصطدام بالماء نجعل $s = 0$

$$-16\, t^2 + 16\, t + 32 = 0 \Longrightarrow -16(t+1)(t-2) = 0$$

وبالتالي: $t = -1 \ ,\ t = 2$

أي أن الغطاس يصطدم بالماء بعد ثانيتين من قفزه.

لحساب سرعته في تلك اللحظة نعوض تلك القيمة بمعادلة السرعة :

$$v(t) = s'(t) = -32t + 16$$

ومنه: $v(2) = s'(2) = -32(2) - 16 = -48\ m\backslash s$

وبالتالي سرعته 48 متر في الثانية.

حساب المشتقات:

اقتراح3:

ليكن f, g تابعين قابلين للاشتقاق على I. عندئذ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x);$ λ ثابت حقيقي عدد
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{-f'(x)}{f^2(x)};\quad f(x) \neq 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};\quad g(x) \neq 0$

تركيب التوابع :

اقتراح 4:

إذا كان f تابع قابل للاشتقاق عند x و g قابل للاشتقاق عند $f(x)$, عندئذ $(g \circ f)$ قابل للاشتقاق عند x ومشتقه:

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

البرهان:

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0)$$

مثال:

لنحسب مشتق التابع $\ln(1+x^2)$. لدينا $g(x) = \ln x$ و $g'(x) = \frac{1}{x}$ و التابع $f(x) = 1 + x^2$ ومشتقه $f'(x) = 2x$, وعليه يكون مشتق التابع $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ هو:

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x) = g'(1+x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

مشتقات التوابع الشهيرة :

الجدول الأول يمثل مشتقات التوابع حيث x متغير , بينما الجدول الثاني يمثل مشتقات التوابع المركبة حيث $x \mapsto u(x)$

التابع	مشتقه
x^n	nx^{n-1}; $n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

التابع	مشتقه
u^n	$nu'u^{n-1}$; $n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$

ملاحظة:

إن كل من الصيغ التالية: $x^n, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, x^\alpha$ تعتبر نتيجة مباشرة من مشتق التابع الأسي. لنأخذ على سبيل المثال $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ وعليه:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}\left(e^{\alpha \ln x}\right) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = x^{\alpha-1}$$

أما إذا أردنا اشتقاق تابع بقوة تتبع لمتغير x يتوجب علينا العودة إلى مشتق التابع الأسي:

على سبيل المثال: لنأخذ التابع $f(x) = 2^x$, لنعيد صياغتها بالشكل

$2^x = e^{x \ln 2}$, ويكون $f'(x) = \ln 2\, e^{x \ln 2} = \ln 2 \;\; 2^x$

لازمة1:

ليكن I مجال مفتوح وليكن $f: I \to J$ قابل للاشتقاق وتقابل, عندئذ يكون $f^{-1}: J \to I$ تقابل عكسي. إذا كان f' لا ينعدم $\forall x \in J$ يكون:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

ملاحظة:

نرى أنه من السهل لإيجاد مشتق التقابل العكسي الانطلاق من العلاقة:

$$f\left(g(x)\right) = x$$

ويكون المشتق باستخدام علاقة مشتق التوابع المركبة وكون مشتق x يساوي 1:

$$f'\left(g(x)\right) g'(x) = 1$$

ولدينا $g = f^{-1}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

مثال: ليكن لدينا التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x+\exp x$ لندرس التابع بالتفصيل:

1. التابع قابل للاشتقاق كونه مجموع لتابعين قابلين للاشتقاق, وبشكل خاص التابع مستمر.
2. التابع متزايد تماماً كونه مجموع لتابعين متزايدين تماماً.
3. التابع تقابل حيث $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
4. $f'(x)=1+\exp x$ لا ينعدم $(\forall x\in\mathbb{R})$

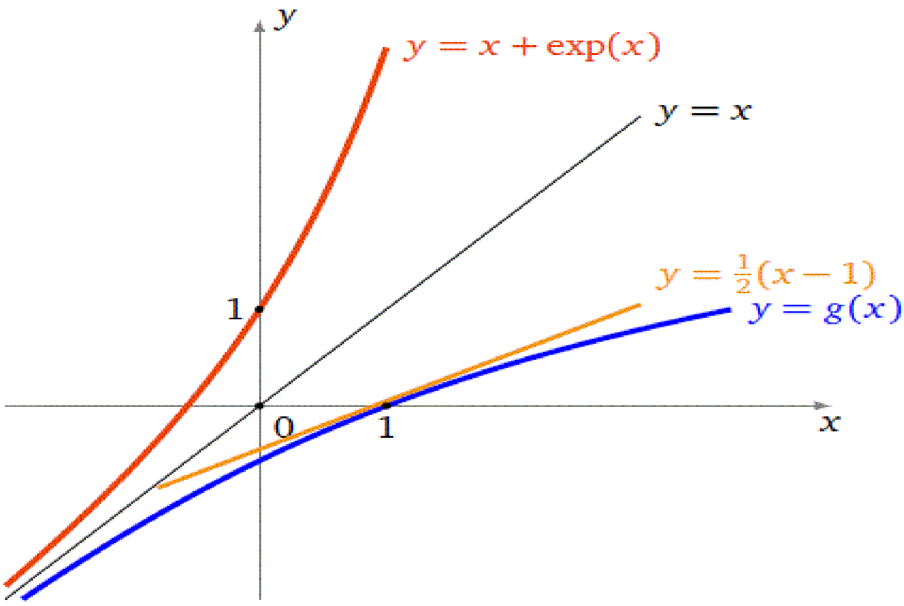
لنرمز ب $g=f^{-1}$ للتقابل العكسي للتابع f على الرغم من أننا غير قادرين على تحديد شكل التابع g, نستطيع إيجاد مشتقه ومعرفة مميزاته.

حسب اللازمة أعلاه g قابل للاشتقاق: لنوجد مشتقه باشتقاق العلاقة
$$f\big(g(x)\big)=x$$

ويكون:
$$f'\big(g(x)\big)g'(x)=1$$

وعليه:
$$g'(x)=\frac{1}{f'\big(g(x)\big)}=\frac{1}{1+\exp\big(g(x)\big)}$$

من العلاقة:
$$f\big(g(x)\big)=x$$
يكون: $g(x)+\exp\big(g(x)\big)=x$ وعليه $\exp\big(g(x)\big)=x-g(x)$ ويكون:
$$g'(x)=\frac{1}{1+x-g(x)}$$



على سبيل المثال: $f(0) = 1$ يكون $g(1) = 0$ وعليه $g'(1) = \frac{1}{2}$. بكلام آخر $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$. معادلة مماس التابع f^{-1} في النقطة $x_0 = 1$ هي $y = \frac{1}{2}(x-1)$.

المشتقات المتتالية لتابع:

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابع قابل للاشتقاق ومشتقه f', وإذا كان التابع $f': I \to \mathbb{R}$ كذلك قابل للاشتقاق, نرمز لمشتقه ب $f'' = (f')'$, لنعمم كما يلي:

$$f^{(0)} = f, \; f^{(1)} = f' \;\; , f^{(2)} = f'', \quad \text{و} \; f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

ملاحظة:

وجدنا سابقاً أنه يمكن الحصول على تابع السرعة من خلال إيجاد مشتق تابع الموضع, ويمكن إيجاد تابع التسارع بإيجاد مشتق تابع السرعة, أي يمكن إيجاد تابع التسارع باشتقاق تابع الموضع مرتين

$s(\cdot)$ تابع الموضع , $v(\cdot) = s'(\cdot)$ تابع السرعة , $a(\cdot) = v'(\cdot) = s''(\cdot)$ تابع التسارع

نظرية: (صيغة ليبنيز Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

بكلام آخر:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$

تطبيق:

- عندما $n=1$, $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
- عندما $n=2$, $(f\cdot g)''=f''\cdot g+2f'\cdot g'+f\cdot g''$

مثال :

ليكن لدينا التابع $f(x)=\exp x$ والتابع $g(x)=x^2+1$

ولنوجد $(f\cdot g)^{(n)}$, من أجل ذلك سنطبق صيغة ليبنيز, لنحسب المشتقات المتتالية لكل من التابعين:

$$f(x)=\exp x\ \ ,f'(x)=\exp x\ ,f''(x)=\exp x\ ,f^{(k)}(x)=\exp x$$

$$g(x)=x^2+1, g'(x)=2x\ , g''(x)=2,\ \ g^{(k)}(x)=0\quad \forall k>3$$

بتطبيق صيغة ليبنيز

$$(f\cdot g)^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}\cdot g^{(1)}+\binom{n}{2}f^{(n-2)}\cdot g^{(2)}+\binom{n}{3}f^{(n-3)}\cdot g^{(3)}\dots$$

$$(f\cdot g)^{(n)}=\exp x\,(x^2+1)+\binom{n}{1}\exp x\cdot 2x+\binom{n}{2}\cdot 2$$

وبالتالي:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\exp x\cdot(x^2+2nx+n(n-1)+1)$$

التوابع الضمنية والتوابع الصريحة:

التوابع التي تعاملنا معها حتى الآن تم التعبير عنها صراحةً حيث y يكتب بدلالة x كالمثال التالي:

$y=3x^2-5$.

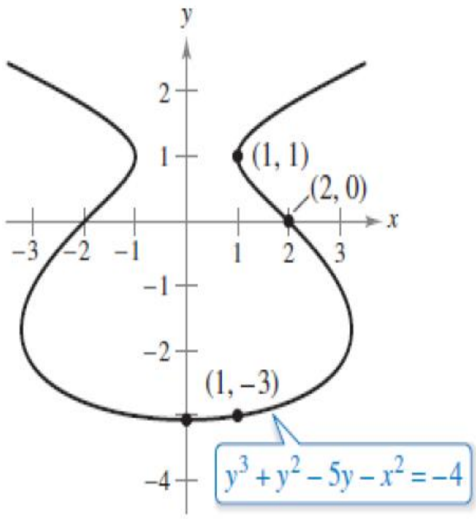
لكن في بعض الحالات من الصعب التعبير عن y بدلالة x كالمثال :

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2$$

ندعو هذا النوع من التوابع بالتوابع الضمنية لإيجاد المشتق $\frac{dy}{dx}$ سنستخدم الاشتقاق المركب.

سنوضح كيفية اشتقاق هذا النوع من التوابع من خلال المثال التالي:

مثال: إذا كان $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ أوجد $\frac{dy}{dx}$



$$\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = \frac{dy}{dx}(-4)$$

$$\frac{d}{dx}y^3 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}5y - \frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{d}{dx}(-4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 2y - 5) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

مثال: أوجد ميل مماس المنحني $3(x^2 + y^2)^2 = 100\,x\,y$ في النقطة $(3,1)$

$$\frac{d}{dx}(3(x^2 + y^2)^2) = \frac{d}{dx}(100\,x\,y)$$

$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right)$$

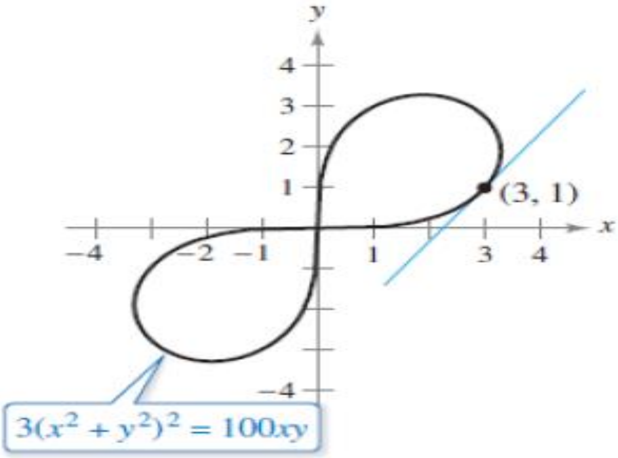
$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$(12y(x^2 + y^2) - 100x)\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{(-100x + 12y(x^2 + y^2))}$$

عند النقطة $(3,1)$ يكون ميل المماس:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{100(1) - 12x((3)^2 + 1^2)}{(-100(3) + 12(1)(3^2 + 1^2))} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{13}{9}$$



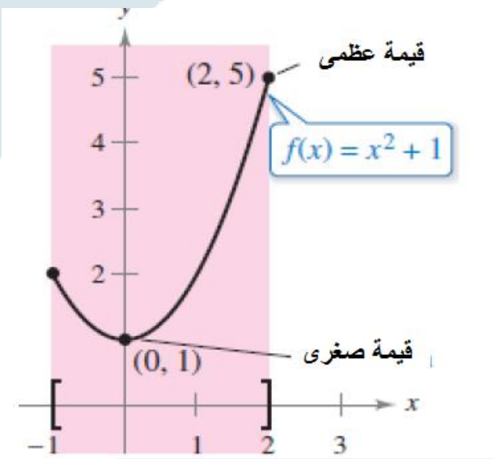
النقاط الحرجة و القيم القصوى :

ليكن $f: I \to \mathbb{R}$ تابع مستمر على المجال I يحوي النقطة x_0.

نذكر بتعريف القيم القصوى الذي سبق وذكرناه في هذا الفصل:

تعريف القيم القصوى:

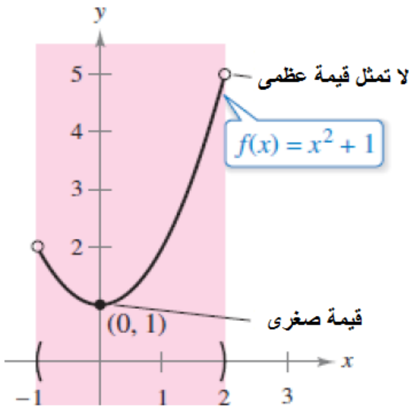
- نقول عن f أنه يملك قيمة عظمى في x_0 على المجال I إذا تحقق:
$$\left(\forall x \in I \;\; f(x) \leq f(x_0)\right)$$
- نقول عن f أنه يملك قيمة صغرى في x_0 على المجال I إذا تحقق:
$$\left(\forall x \in I \;\; f(x) \geq f(x_0)\right)$$

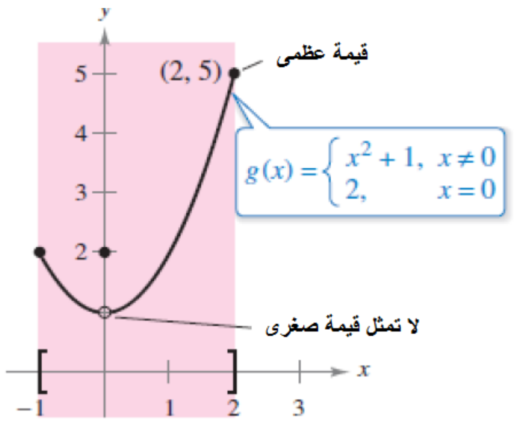


ندعو القيم العظمى والصغرى لتابع على مجال I بالقيم القصوى لتابع على مجال. كما ندعوها بالقيم العظمى المطلقة أو القيم الصغرى المطلقة أو بالقيم العظمى العامة أو القيم الصغرى العامة.

القيم القصوى قد تكون على ضمن المجال أو على أطرافه عندئذ ندعوها بالقيم القصوى الطرفية.

كما أنه ليس بالضرورة أن يكون للتابع قيم عظمى أو صغرى على مجال ما.





نلاحظ أن التابع$f(x) = x^2 + 1$ قيمة عظمى وصغرى على المجال المغلق $[-1,2]$ (الشكل الأول), ولكن ليس له قيمة عظمى على المجال المفتوح $]-1,2[$ (الشكل الثاني). كما نلاحظ أن استمرارية التابع أو عدم استمراره يؤثر على وجود قيم قصوى للتابع على مجال ما (الشكل الثالث).

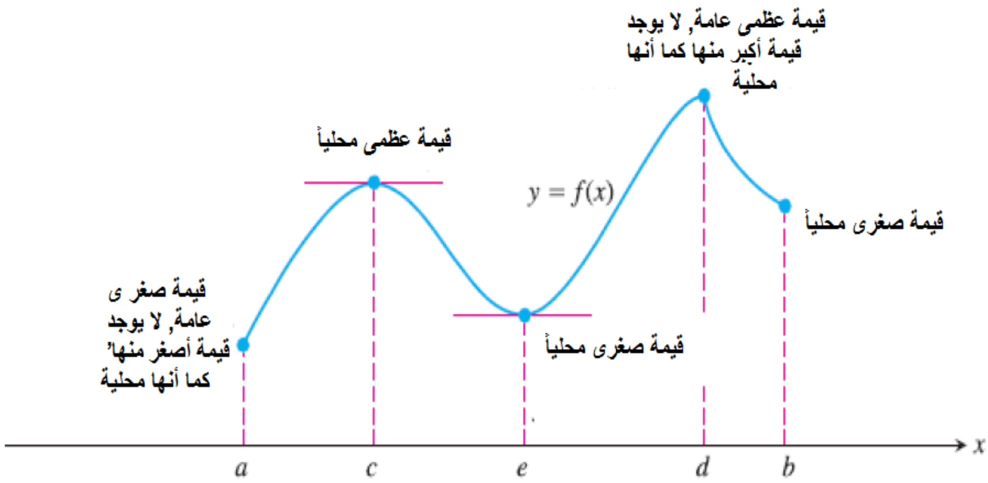
نظرية (القيم القصوى)

ليكن f تابع مستمر على مجال مغلق $[a, b]$, عندها يكون للتابع f قيمة صغرى وعظمى على هذا المجال.

القيم الصغرى والعظمى محلياً والنقاط الحرجة:

تعريف:

- نقول عن f أنه يملك قيمة عظمى محلياً في x_0 إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث:
$(\forall x \in I \cap J ;\ f(x) \leq f(x_0))$
- نقول عن f أنه يملك قيمة صغرى محلياً في x_0 إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث:
$(\forall x \in I \cap J ;\ f(x_0) \leq f(x))$



- أن نقول أن f يملك قيمة عظمى محلياً في x_0, يعني أن $f(x_0)$ أكبر قيم $f(x)$ حيث x قريبة من x_0.
- نقول أن $f: I \to \mathbb{R}$ يملك قيمة عظمى في x_0, إذا كانت

$$\left(\forall x \in I\ ;\ \ f(x) \leq f(x_0)\right)$$

- **القيمة العظمى هي قيمة عظمى محلياً بينما العكس غير صحيح.**

ملاحظة:

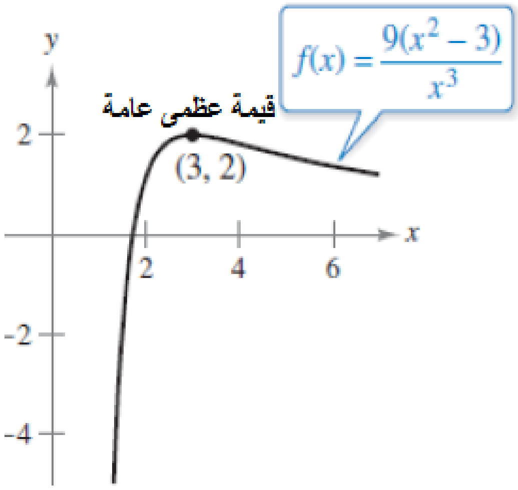
من أجل تابع مستمر, بيانياً: القيم العظمى محلياً تشبه الذروة (تلة) بالنسبة للمنحني, والقيم الصغرى محلياً تشبه القعر (وادي) بالنسبة للمنحني.

يمكن أن تكون القمة (أو القعر) ملساء وفي هذه الحالة يقبل الخط البياني يقبل مماس أفقي عند النقطة الموافقة للقيمة القصوى.

كما يمكن أن تكون حادة ومدببة في هذه الحالة لا يكون التابع قابل للاشتقاق عند هذه القيمة.

مثال: أوجد قيمة المشتق عند كل قيمة قصوى محلياً :

(a)



$$f(x) = \frac{9(x^2-3)}{x^3}$$

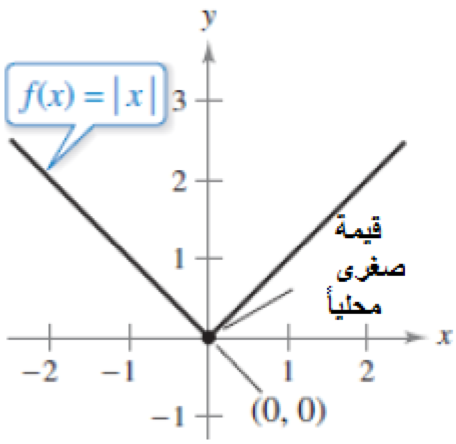
$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - 3x^2\big(9(x^2-3)\big)}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9(9-x^2)}{x^4}$$

عند النقطة $(3,2)$ يكون :

$$f'(3) = 0$$

(b)



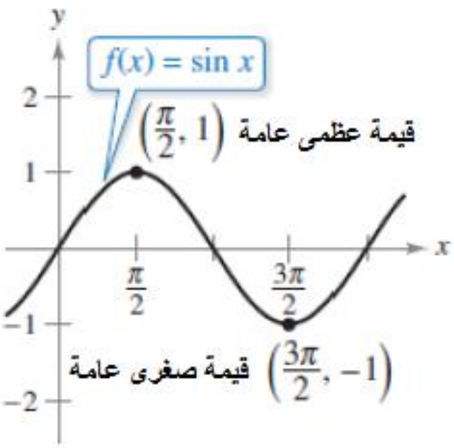
$$f(x) = |x|$$

عندما $x = 0$ المشتق غير موجود حيث:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$

(c)



$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

قيمة المشتق عند $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ هي

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

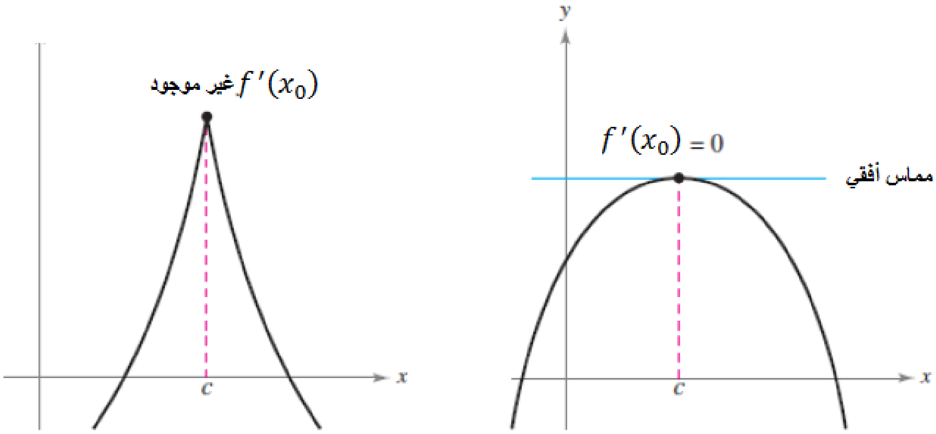
قيمة المشتق عند $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ هي

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

لاحظ أن كل قيمة قصوى محلياً المشتق عندها إما معدوم أو غير موجود.

تعريف النقطة الحرجة:

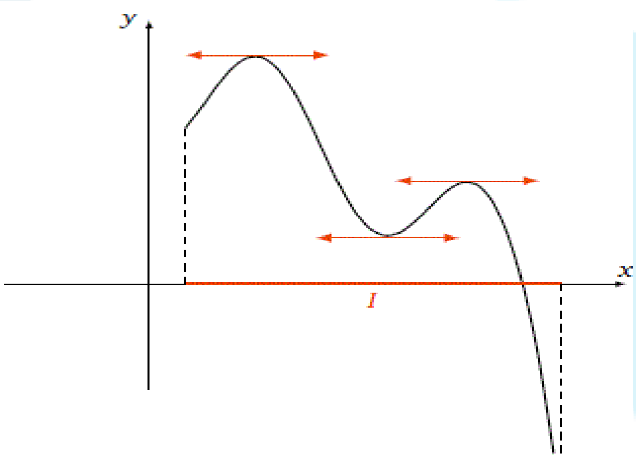
ليكن f تابع معرف عند x_0, إذا كان $f'(x_0) = 0$ أو إذا كان f غير قابل للاشتقاق عند x_0, عندئذ x_0 نقطة حرجة ل f.



نظرية(Fermat):

ليكن I مجال مفتوح و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع قابل للاشتقاق, إذا ملك f قيمة عظمى محلياً عند x_0 (أو صغرى محلياً) عندئذ $f'(x_0) = 0$.

بكلام آخر: القيمة العظمى أو الصغرى محلياً هي دائماً نقطة حرجة, هندسياً مماس بيان التابع في النقطة $(x_0, f(x_0))$ أفقي.



مثال:

لندرس القيم القصوى (الصغرى والعظمى) للتابع f_λ المعرف بالشكل:

التابع $f_\lambda = x^3 + \lambda x$ لـ $\lambda \in \mathbb{R}$. مشتق التابع $f'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda$

لإيجاد القيم القصوى يجب أن نوجد قيم x التي تحقق $f'_\lambda(x) = 0$, لنميز الحالات:

- عندما $\lambda > 0$, يكون $f'_\lambda(x) > 0$ وبالتالي التابع لا يملك نقاط حرجة وعليه لا يملك قيم قصوى حيث أن التابع f_λ متزايد تماماً على $\mathbb{R}$.
- عندما $\lambda = 0$, يكون $f'_\lambda(x) = 3x^2$ والنقطة الحرجة الوحيدة هي $x_0 = 0$ لكنها لا تمثل قيمة قصوى حيث أن:
  - عندما $x < 0$ يكون $f_0(x) < 0 = f(0)$
  - عندما $x > 0$ يكون $f_0(x) > 0 = f(0)$
- عندما $\lambda < 0$ سيكون :

$$f'_\lambda(x) = 3x^2 - |\lambda| = 3\left(x + \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\right)$$

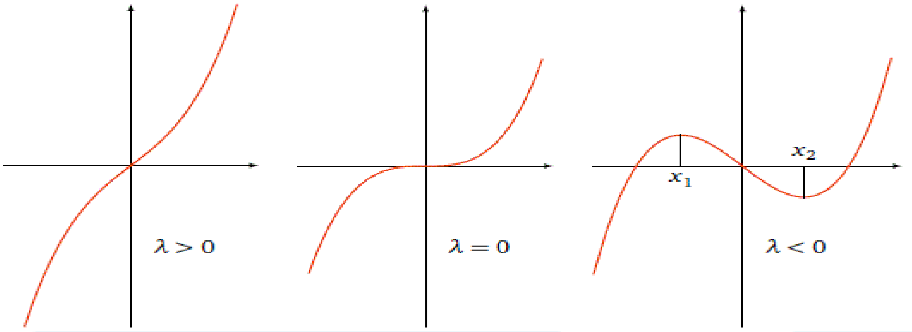
وبالتالي يوجد نقطتين حرجتين:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}} \qquad x_2 = +\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$$

لدينا $f'_\lambda(x) > 0$ على المجال $]-\infty, x_1[$ و $]x_2, +\infty[$ و

$f'_\lambda(x) < 0$ على المجال $]x_1, x_2[$

إذاً لدينا التابع f_λ متزايد على المجال $]-\infty, x_1[$ ثم يتناقص على المجال $]x_1, x_2[$ وبالتالي x_1 قيمة عظمى محلياً, من جهة ثانية f_λ متناقص على المجال $]x_1, x_2[$ ثم يتزايد على المجال $]x_2, +\infty[$ وبالتالي x_2 قيمة صغرى محلياً.



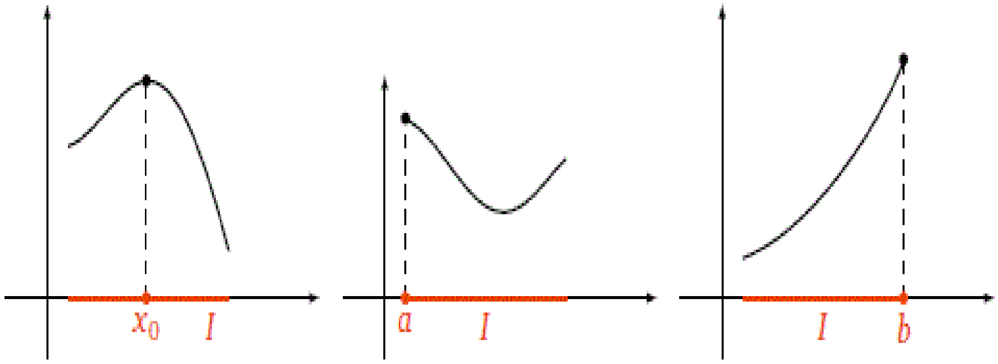
ملاحظة:

1. عكس النظرية (فيرما) غير صحيح. على سبيل المثال التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالشكل $f(x)=x^3$ يحقق $f'(0)=0$ بينما $x_0=0$ ليست قيمة صغرى ولا عظمى محلياً.

2. مجال التعريف في النظرية 2 مفتوح, في حال كان المجال مغلق يجب أخذ أطراف المجال بعين الاعتبار.

على سبيل المثال لنأخذ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع قابل للاشتقاق ويملك قيمة قصوى x_0 عندئذ ستكون ضمن أحد الحالات التالية:

- $x_0=a$
- $x_0=b$
- $x_0\in\,]a,b[;\quad f'(x_0)=0$



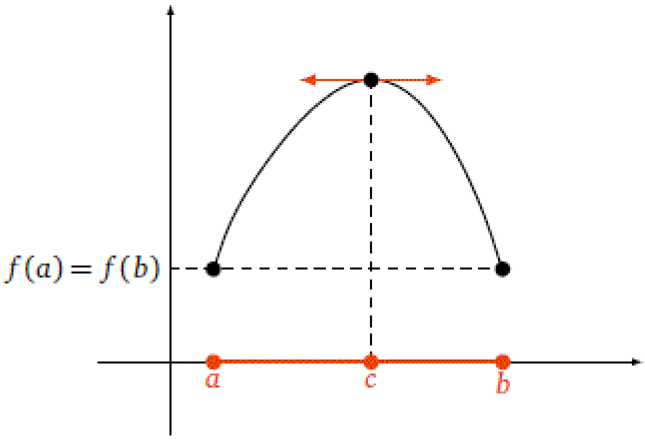
3. لتحديد $\max\limits_{[a,b]} f$ و $\min\limits_{[a,b]} f$ (حيث $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع قابل للاشتقاق), علينا مقارنة قيمة التابع عند النقط الحرجة مع قيمة التابع عند أطراف المجال.

نظرية رول Rolle:

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث:

- f مستمر على المجال $[a,b]$.
- f قابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

وبالتالي يوجد على الأقل $c\in\,]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$



التفسير الهندسي: يوجد على الأقل نقطة من بيان التابع بحيث يكون المماس عندها أفقي.

مثال:

ليكن $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$ كثيرة حدود تملك n جذر محتلف $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n$

1. لنبين أن P' يملك $(n-1)$ جذر محتلف.

لدينا P كثيرة حدود $P(x)\longmapsto x$ تمثل تابع مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بما أن $P(\alpha_1)=P(\alpha_2)$, وبالتالي حسب نظرية رول يوجد $c_1\in\,]\alpha_1,\alpha_2[$ بحيث $P'(c_1)=0$. لنعمم: من أجل $1\le k\le n-1$, بما أن $P(\alpha_k)=0=P(\alpha_{k+1})$ وبالتالي حسب نظرية رول يوجد $c_k\in\,]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ بحيث $P'(c_k)=0$, وبذلك نكون قد وجدنا $(n-1)$ جذر ل P' بحيث:

$$c_1<c_2<\dots<c_{n-1}$$

وبالتالي P' كثيرة حدود من الدرجة $(n-1)$ وكافة جذورها حقيقية ومختلفة.

2. لنبين أن $P+P'$ يملك $(n-1)$ جذر مختلف.

لنعرف التابع المساعد التالي: $f(x)=P(x)\cdot\exp x$, التابع f مستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$, f ينعدم عندما P ينعدم أي في النقاط $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$. مشتق التابع f هو:

$f'(x)=\big(P(x)+P'(x)\big)\exp x$ وبالتالي حسب نظرية رول, من أجل كل $1\le k\le n-1$, بما أن $f(\alpha_k)=0=f(\alpha_{k+1})$ وبالتالي يوجد $\gamma_k\in\,]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ بحيث $f'(\gamma_k)=0$. بما أن التابع الأسي لا ينعدم وبالتالي $(P+P')(\gamma_k)=0$ وعليه أوجدنا $(n-1)$ جذر مختلف ل $(P+P')$ وهي: $\gamma_1<\gamma_2<\dots\gamma_{n-1}$

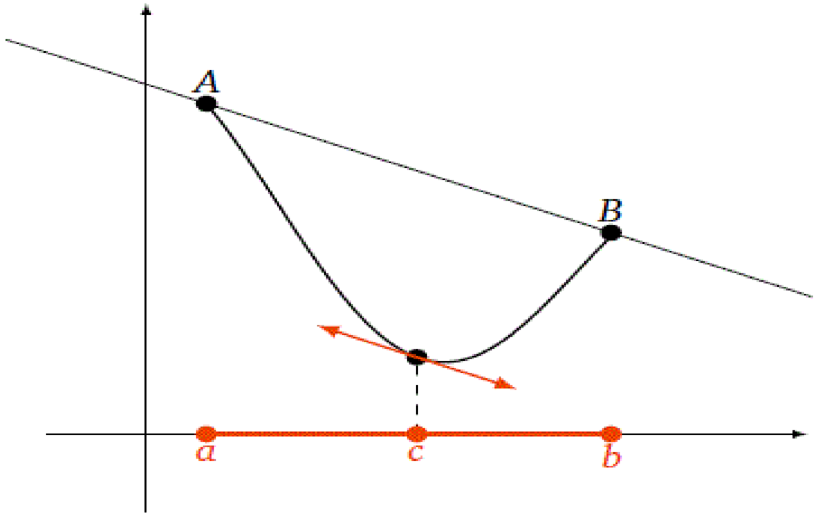
نظرية التزايدات المنتهية:

نظرية:

ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع مستمر على $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على $]a,b[$, يوجد $c\in\,]a,b[$ بحيث:

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

التفسير الهندسي: يوجد على الأقل نقطة من بيان التابع f حيث يكون المماس موازٍ للمستقيم (AB) بحيث $A=(a,f(a))$ و $B=(b,f(b))$



اقتراح (تمديد الاشتقاق عند نقطة):

إذا كان f معرف على المجال $I\subseteq\mathbb{R}$ وقابل للاشتقاق على $I\backslash\{a\}$ $(a\in I)$ وبفرض مشتقه f' يملك نهاية منتهية l في النقطة a عندئذ f قابل للاشتقاق في a ومشتقه $f'(a)=l$.

ملاحظة:

مشتق التابع القابل للاشتقاق ليس بالضرورة أن يكون مستمر.

مثال:

التابع التالي مقال كلاسيكي لتابع قابل للاشتقاق بينما مشتقه تابع غير مستمر:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

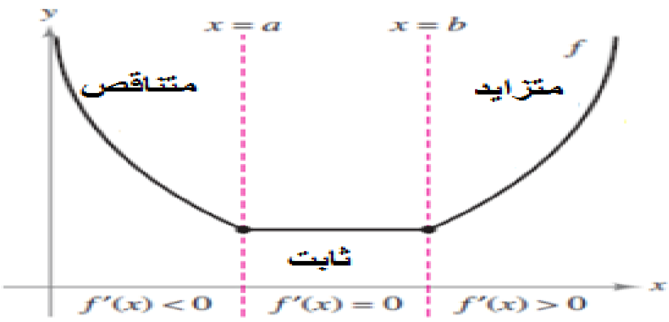
تابع قابل للاشتقاق عند الصفر, بينما مشتقه يمثل تابع غير مستمر عند الصفر(لأنه لا يملك نهاية عند الصفر)

التوابع المتزايدة والمشتق:

لازمة 2:

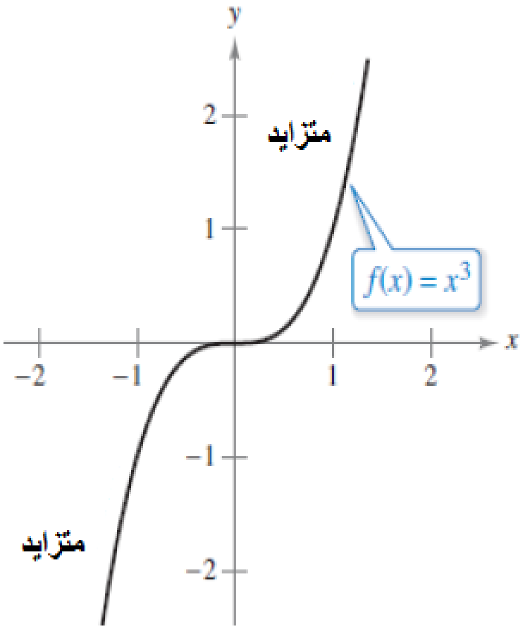
ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع مستمر على $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على $]a,b[$:

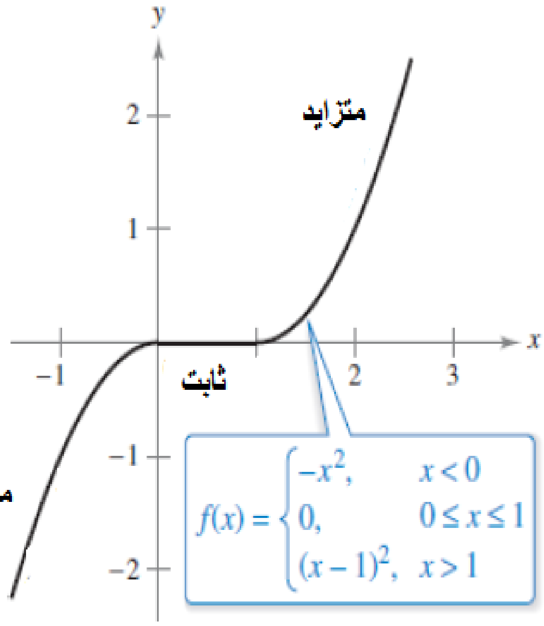
1. f متزايد $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)\geq 0$
2. f متناقص $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)\leq 0$
3. f ثابت $\Leftrightarrow$ $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)=0$
4. f متزايد تماماً $\Leftarrow$ $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)>0$
5. f متناقص تماماً $\Leftarrow$ $\forall x\in\,]a,b[\;\; f'(x)<0$



توضيح (المضطرد تماماً):

التابع $f(x)=x^3$ هو تابع مضطرد تماماً كما هو موضح في الشكل أدناه (يمين), بينما التابع أدناه (يسار) ليس مضطرد تماماً لأنه ثابت على المجال $[0,1]$





ملاحظة:

عكس النقطتين (4)و(5) خاطئ, على سبيل المثال التابع $x \mapsto x^3$ متزايد تماماً كما أن مشتقه معدوم.

مثال: حدد المجالات حيث يكون التابع $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ متزايد أو متناقص:

الحل:

من الملاحظ أن التابع قابل للاشتقاق على كامل مجموعة الأعداد الحقيقية.

لتحديد النقاط الحرجة للتابع نحل المعادلة: $f'(x) = 0$

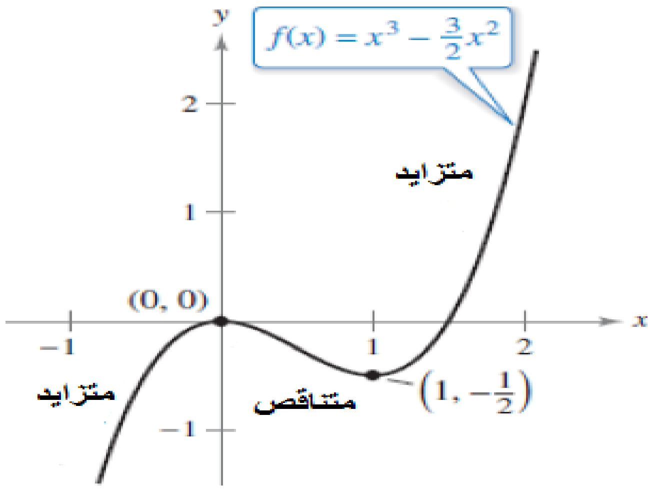
$$3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

بما أن التابع معرف دائماً كونه كثيرة حدود وبالتالي النقاط الحرجة الوحيدة هي:

$$x = 0, x = 1$$

يبين الجدول التالي المجالات حيث يكون التابع متزايد أو متناقص:



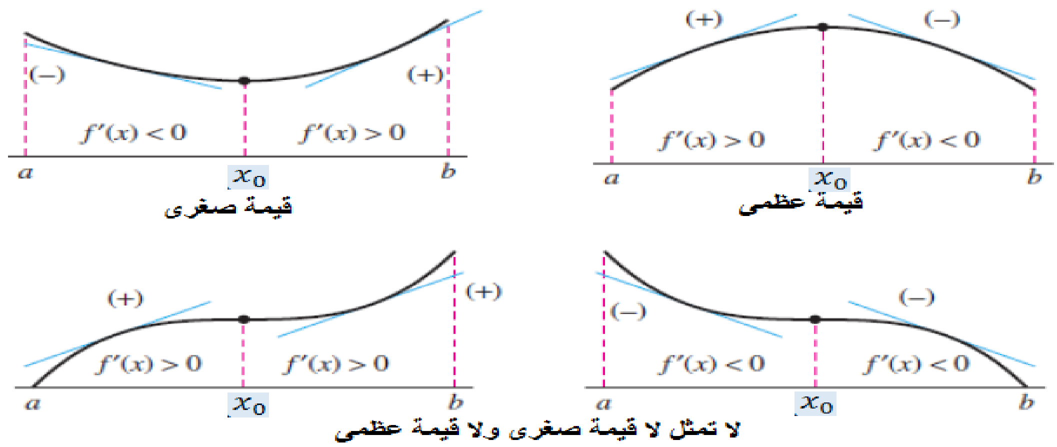
المجال	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
قيمة الاختبار	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
إشارة المشتق	$f'(-1) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'(21) > 0$
النتيجة	التابع متزايد	التابع متناقص	التابع متزايد

ومنه التابع متزايد على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ ومتناقص على المجال $]0,1[$

مبرهنة (اختبار المشتق الأول):

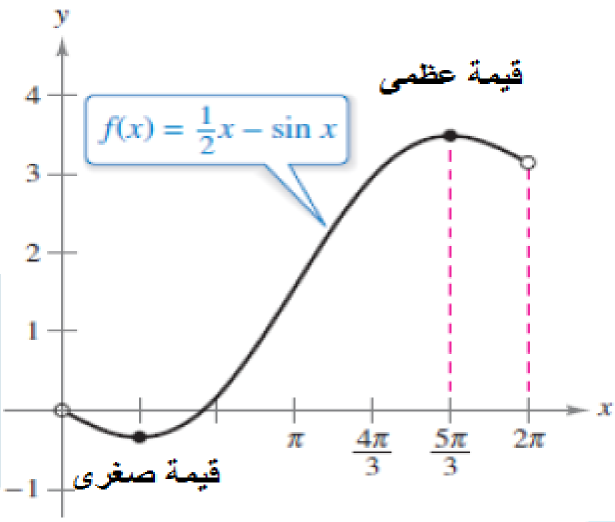
لتكن x_0 نقطة حرجة للتابع f المستمر على المجال I, وكان قابل للاشتقاق على I (قد لا يكون قابل للاشتقاق عند x_0) عندها:

1. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند x_0, تكون $(x_0, f(x_0))$ قيمة صغرى محلياً .
2. إذا تغيرت إشارة f' من الموجب إلى السالب عند x_0, تكون $(x_0, f(x_0))$ قيمة عظمى محلياً .
3. إذا كان f' موجباً (أو سالباً) على كلا جانبي النقطة x_0 عندئذ $(x_0, f(x_0))$ لا تمثل لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى للتابع.



مثال: أوجد القيم القصوى محلياً للتابع $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ على المجال $]0,2\pi[$

الحل:



التابع مستمر على المجال $]0,2\pi[$ لتحديد النقاط الحرجة للتابع على هذا المجال, نوجد القيم التي تعدم المشتق:

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x=0 \Rightarrow$$

$$\cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

تابع المشتق معرف في كل مكان وبالتالي النقطتان الحرجتان الوحيدتان للتابع $x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$

المجال	$0<x<\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$
قيمة الاختبار	$x=\frac{\pi}{4}$	$x=\pi$	$x=\frac{7\pi}{4}$
إشارة المشتق	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$	$f'(\pi)>0$	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right)<0$
النتيجة	التابع متناقص	التابع متزايد	التابع متناقص

بتطبيق اختبار المشتق الأول نستنتج أن لـ f قيمة صغرى محلياً عند $x=\frac{\pi}{3}$ وقيمة عظمى محلياً عند $x=\frac{5\pi}{3}$.

التقعر واختبار المشتق الثاني:

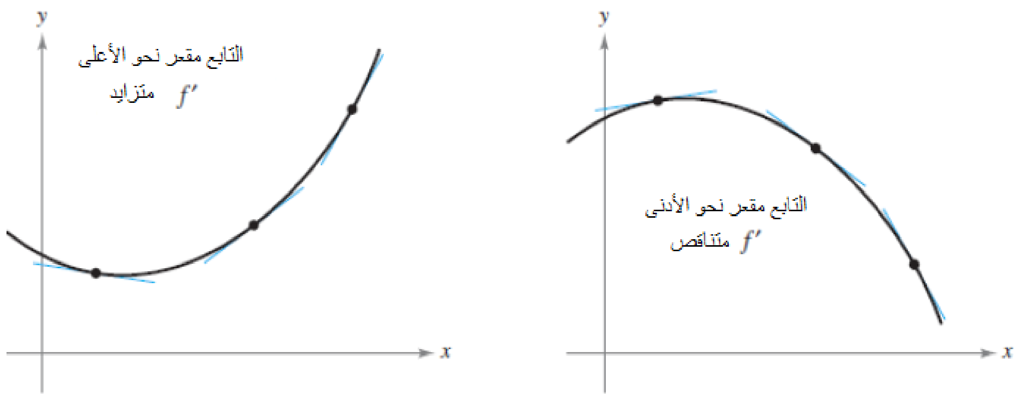
التقعر:

تعريف:

ليكن f تابع قابل للاشتقاق على المجال المفتوح I, يكون الخط البياني للتابع f مقعراً نحو الأعلى على I إذا كان f' متزايداً على ذلك المجال, ويكون مقعراً نحو الأدنى على I إذا كان f' متناقصاً على ذلك المجال.

الأشكال أدناه ستساعدنا على فهم أفضل لمعنى التقعر:

1. ليكن f تابع قابل للاشتقاق على المجال المفتوح I, إذا كان الخط البياني للتابع f مقعر نحو الأعلى على I, عندها يكون الخط البياني للتابع يقع فوق جميع المماسات للتابع على المجال I.
2. ليكن f تابع قابل للاشتقاق على المجال المفتوح I, إذا كان الخط البياني للتابع f مقعر نحو الأدنى على I, عندها يكون الخط البياني للتابع يقع تحت جميع المماسات للتابع على المجال I.



بيان التابع يقع فوق خطوط مماساته

بيان التابع يقع تحت خطوط مماساته

لإيجاد المجالات المفتوحة حيث يكون الخط البياني للتابع مقعر للأعلى أو للأسفل يجب أن نوجد المجالات حيث يكون تابع المشتق متزايد أو متناقص.

على سبيل المثال لنأخذ التابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

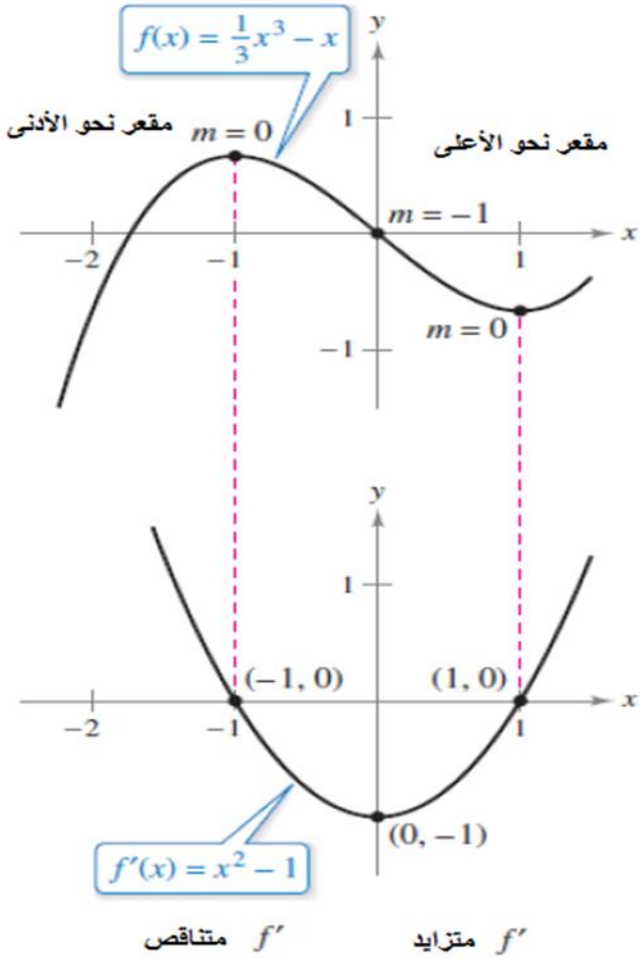
مقعر للأسفل على المجال $]-\infty, 0[$

لأن $f'(x) = x^2 - 1$ متناقص على هذا المجال.

بينما يكون مقعر للأعلى على المجال $]0, \infty[$

لأن $f'(x) = x^2 - 1$ متزايد على هذا المجال.

في المبرهنة التالية سنعرض كيفية استخدام المشتق الثاني للتابع لدراسة تقعر التابع.



مبرهنة (اختبار التقعر):

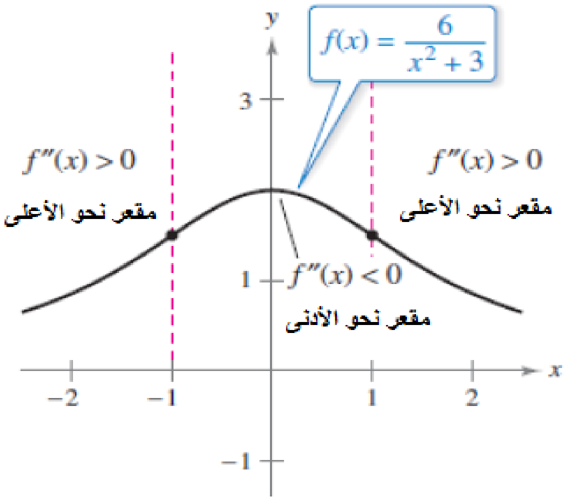
ليكن التابع f قابل للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I.

1. إذا كان $f''(x) > 0$ على جميع قيم x في المجال I, عندها يكون الخط البياني للتابع f مقعر نحو الأعلى على I.
2. إذا كان $f''(x) < 0$ على جميع قيم x في المجال I, عندها يكون الخط البياني للتابع f مقعر نحو الأدنى على I.

لتطبيق المبرهنة يكفي أن نوجد القيم التي تعدم المشتق الثاني و القيم التي يكون عندها المشتق الثاني غير معرف, نستخدم هذه القيم لتحديد مجالات الاختبار وأخيراً: نختبر إشارة المشتق الثاني على كل المجالات التي أوجدناها.

مثال:

أوجد المجالات التي يكون عليها الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$ مقعر نحو الأعلى أو الأسفل.



نلاحظ أن التابع f مستمر على كامل $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3} = 6(x^2+3)^{-1}$$

$$f'(x) = (-6)(x^2+3)^{-2}(2x)$$

$$= \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (12x)(2)(x^2+3)(2x)}{(x^2+3)^4} = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

بما أن $f''(x) = 0$ عندما $x = -1, x = +1$ وبما أن f'' معرف على كامل $\mathbb{R}$, نختبر إشارة f'' على المجالات:
$]-\infty,-1[,\ ]-1,1[,]1,+\infty[$

المجال	$1 < x < +\infty$	$-1 < x < 1$	$-\infty < x < -1$
قيمة الاختبار	$x = 2$	$x = 0$	$x = -2$
إشارة المشتق الثاني	$f''(2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(-2) > 0$
النتيجة	مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأدنى	مقعر نحو الأعلى

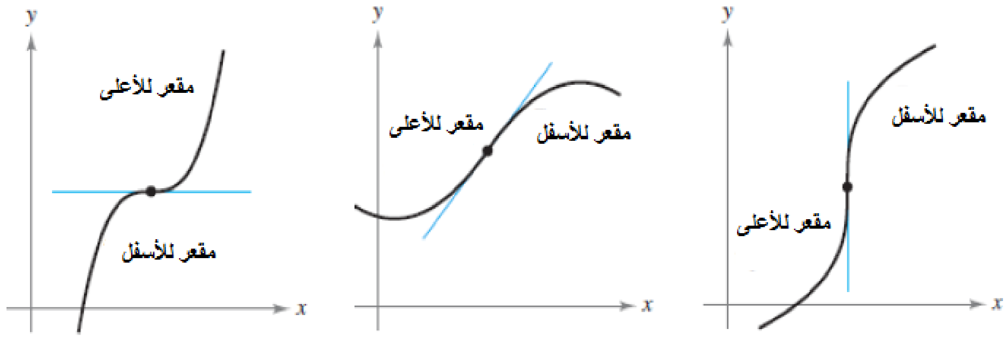
نقاط الانعطاف:

تعريف (نقطة الانعطاف):

ليكن f تابع مستمر على المجال I, ولتكن x_0 نقطة من هذا المجال.

إذا وجد مماس للمنحني عند هذه النقطة $(x_0, f(x_0))$, عندها تمثل هذه النقطة نقطة انعطاف لمنحني التابع f, حيث تتغير جهة التقعر من الأعلى إلى الأسفل (أو من الأسفل إلى الأعلى)

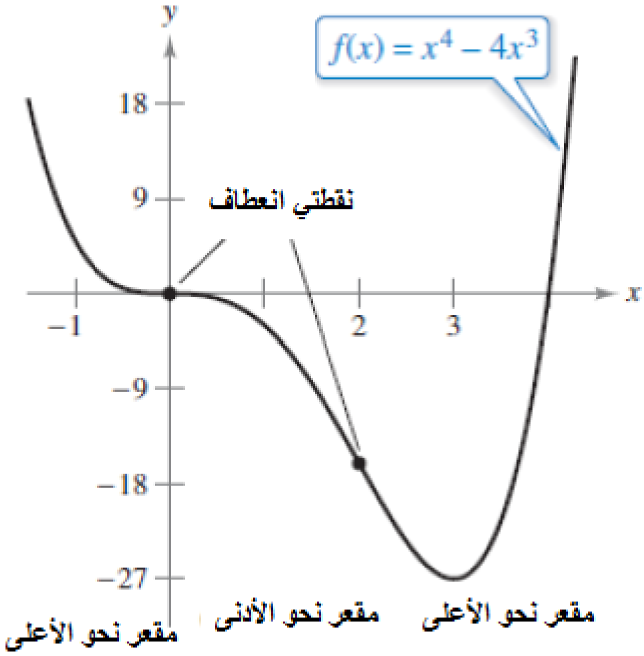
يوجد ثلاث حالات من نقاط الانعطاف نبينها في الأشكال أدناه:



مبرهنة (نقطة الانعطاف):

إذا كانت $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطة انعطاف لمنحني التابع f, عندها إما $f''(x) = 0$ أو f'' غير معرف عند x_0.

مثال: أوجد نقاط انعطاف التابع $f(x) = x^4 - 4x^3$, وناقش تقعره.



$$f(x) = x^4 - 4x^3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$
$$f''(x) = 12x(x-2)$$

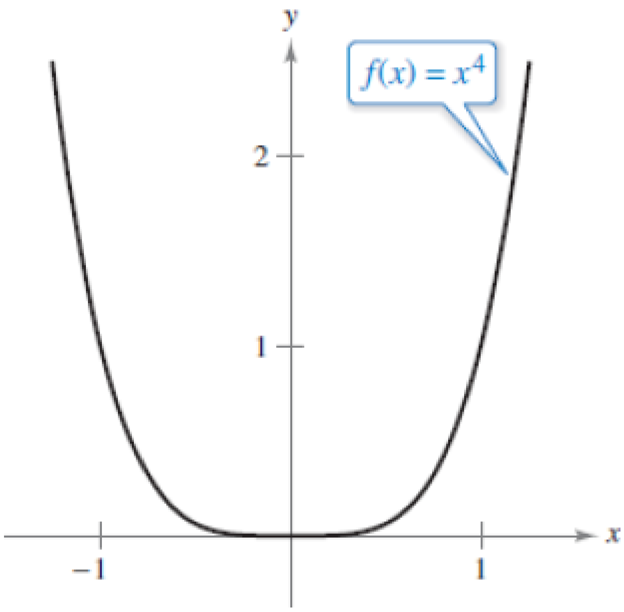
القيم التي تعدم المشتق الثاني $f''(x) = 0$ هي $x = 0, x = 2$

من خلال الجدول التالي نرى أن كل من النقطتين تمثلان نقطتي انعطاف لمنحني التابع

$2 < x < +\infty$	$0 < x < 2$	$-\infty < x < 0$	المجال
$x = 3$	$x = 1$	$x = -1$	قيمة الاختبار
$f''(3) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(-1) > 0$	إشارة المشتق الثاني
مقعر نحو الأعلى	مقعر نحو الأدنى	مقعر نحو الأعلى	النتيجة

عكس النظرية السابقة غير صحيح بشكل عام, حيث أن المشتق الثاني قد ينعدم عند نقطة وهذه النقطة لا تمثل نقطة انعطاف.

على سبيل المثال, لنأخذ التابع $f(x) = x^4$, المشتق الثاني لهذا التابع ينعدم عند $x = 0$ ولكن النقطة $(0,0)$ لا تمثل نقطة انعطاف لمنحني التابع, حيث أن منحني التابع لا يغير جهة تقعره حيث أن منحني التابع مقعر نحو الأعلى على كلا المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

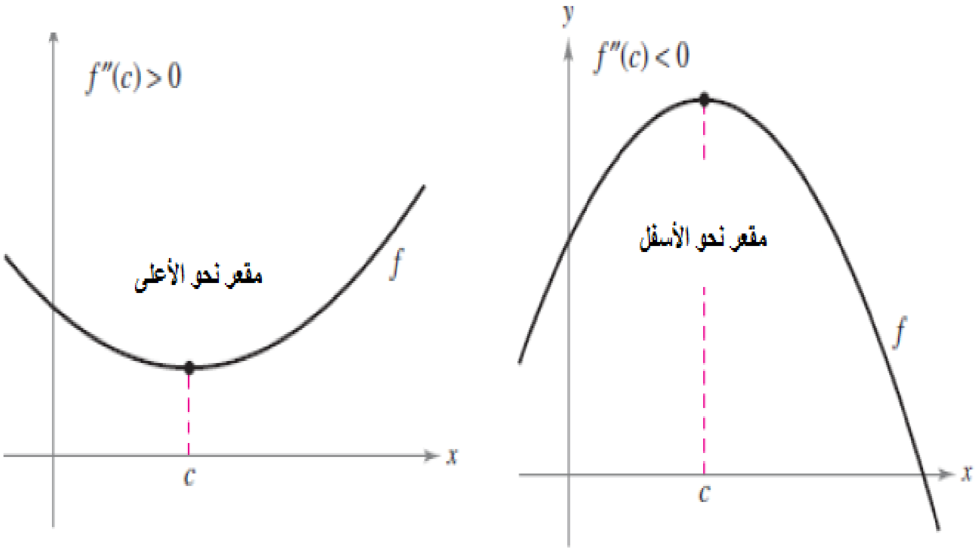


اختبار المشتق الثاني:

بالإضافة إلى اختبار التقعر , فإن المشتق الثاني يمكن أن نستخدمه في تحديد القيم الصغرى و العظمى محلياً.

حيث أنه, إذا كان منحني التابع مقعر نحو الأعلى على مجال يحوي x_0 وكان $f'(x_0) = 0$ عندها النقطة $(x_0, f(x_0))$ تمثل قيمة صغرى محلياً للتابع.

بشكل مشابه, إذا كان منحني التابع مقعر نحو الأدنى على مجال يحوي x_0 وكان $f'(x_0) = 0$ عندها النقطة $(x_0, f(x_0))$ تمثل قيمة عظمى محلياً للتابع.



مبرهنة(المشتق الثاني)

ليكن f تابع بحيث $f'(x_0) = 0$, وكان المشتق الثاني معرف على مجال مفتوح يحوي x_0.

1. إذا كان $f''(x_0) > 0$, عندها $\left(x_0, f(x_0)\right)$ تمثل قيمة صغرى محلياً للتابع.
2. إذا كان $f''(x_0) < 0$, عندها $\left(x_0, f(x_0)\right)$ تمثل قيمة عظمى محلياً للتابع.
3. إذا كان $f''(x_0) = 0$, عندها يفشل الاختبار أي أن النقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$ قد تمثل قيمة عظمى محلياً للتابع أو صغرى أو لا تمثل أي منهما, وفي هذه الحالة نعود ونستخدم اختبار المشتق الأول.

مثال:

أوجد القيم القصوى محلياً للتابع: $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

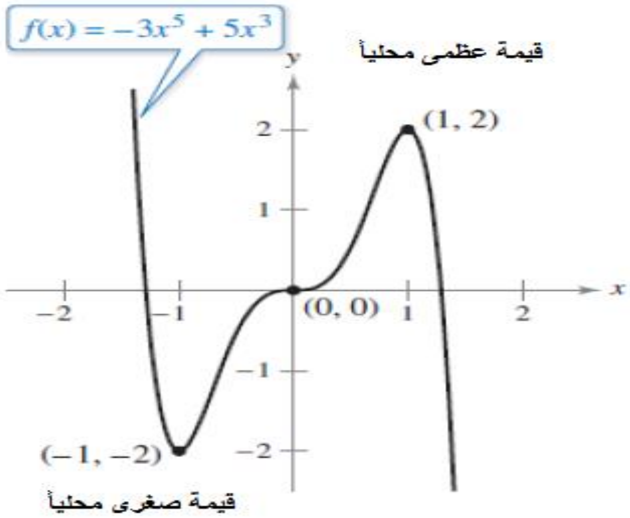
الحل: لنبدأ بإيجاد النقاط الحرجة للتابع بحل المعادلة: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$$

وبالتالي النقاط الحرجة: $x = -1, 0, 1$

لنوجد تابع المشتق الثاني :

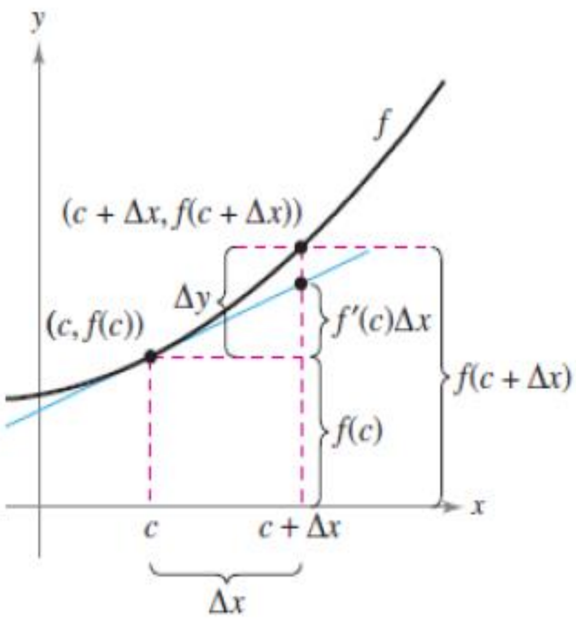
$$f''(x) = -60x^3 + 30x = 30x(1 - 2x^2)$$



النقطة	$(-1,-2)$	$(0,0)$	$(1,2)$
إشارة المشتق الثاني	$f''(-1) > 0$	$f''(0) = 0$	$f''(1) < 0$
النتيجة	قيمة صغرى محلياً	فشل الاختبار	قيمة عظمى محلياً

اختبار المشتق الثاني فشل عند النقطة $(0,0)$. بالاستعانة باختبار المشتق الأول, نلاحظ أن f متزايد على يمين وعلى يسار النقطة $x = 0$ وبالتالي النقطة $(0,0)$ لا تمثل لا قيمة صغرى ولا قيمة عظمة للتابع.

التفاضل:



عندما نستخدم المماس ل f عند النقطة $(c, f(c))$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

لتقريب التابع f , فإن المقدار $(x - c)$ يدعى تغير x ويرمز له Δx. وعندما يكون Δx صغير جداً يقرب التغير في y والذي يرمز له Δy كما يلي:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(c)$$
$$\approx f'(c)\Delta x$$

يرمز عادة ل Δx بالرمز dx ويدعى تفاضل x وللحد $f'(c)\Delta x$ بالرمز dy ويدعى تفاضل y

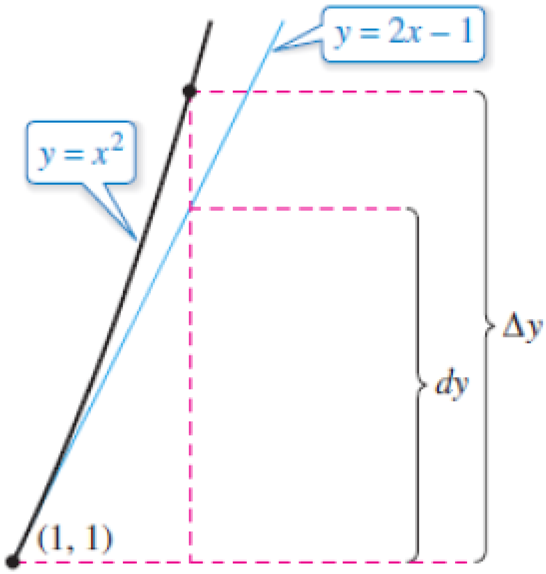
مثال: ليكن $y = x^2$ أوجد dy إذا كان $x = 1,$ $dx = 0.01$. قارن هذه القيمة ب Δy من أجل $x = 1$ و $\Delta x = 0.01$.

بما أن $y = f(x) = x^2$ يكون $f'(x) = 2x$ والتفاضل dy

$$dy = f'(x)dx = f'(1)(0.01) = (2)(0.01) = 0.02$$

الآن, باستخدام $\Delta x = 0.01$ التغير Δy يعطى بالعلاقة:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1 = 0.0201$$



يوضح الشكل المجاور بيانياً المقارنة بين Δy و dy ونرى أنه كلما اقترب Δx من الصفر تقترب قيم dy و Δy من بعضها.

حساب التفاضل:

جميع قواعد الاشتقاق التي درسناها يمكن أن تكتب بشكل تفاضل.

ليكن u, v تابعين قابلين للاشتقاق بالنسبة ل x بحسب تعريف التفاضل يكون:

$$d[u\cdot v]=\frac{d}{dx}[u\cdot v]dx=[uv'+vu']dx=uv'dx+vu'dx$$

$$d[u\cdot v]=udv+vdu$$

بعض القواعد:

1. $d(cu)=cd(u)$ حيث c ثابت.
2. $d(u\mp v)=du\mp dv$
3. $d[u\cdot v]=udv+vdu$
4. $d\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{u\,dv-v\,du}{v^2}$

مثال:

أوجد تفاضل التابع $y=f(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

حسب قاعدة مشتق تركيب تابعين:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+1\,)^{\frac{1}{2}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$dy = f'(x)dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dy$$

يمكن أن يستخدم التفاضل لتقريب قيمة التابع, إذا كان $y = f(x)$ يكون:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(y) + f'(x)dx$$

العلاقة الأخيرة ناتجة عن التغير:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy$$

مثال: باستخدام التفاضل. أعط قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{16.5}$

الحل:

لنضع $f(x) = \sqrt{x}$ وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$f(x+\Delta x) \approx f(y) + f'(x)dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

الآن باختيار: $x = 16$ و $dx = 0.5$ نجد:

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{16.5} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 4.0625$$

تقريب المستقيم المماس للتابع $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = 16$ هو المستقيم: $g(x) = \frac{1}{8}x + 2$.

من أجل قيم x القريبة من 16, فإن الخطين البيانيين للتابعين f, g قريبان من بعضهما كما يوضح الشكل أدناه: