الفصل الرابع – التكامل

التابع الأصلي والتكامل غير المحدود:

التابع الأصلي Antiderivative:

لإيجاد التابع F الذي مشتقه $f(x) = 3x^2$, باستخدام تقنيات الاشتقاق التي تعلمناها في الفصل السابق يكون:

$$F(x) = x^3 \qquad \frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$

ندعو F التابع الأصلي للتابع f.

تعريف التابع الأصلي:

نقول عن التابع F أنه تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا تحقق: $F'(x) = f(x)$ من أجل كل x من I.

تنبيه: دعونا F تابع أصلي (بدون الـ التعريف) والسبب في ذلك أنه يوجد لا نهاية من التوابع الأصلية للتابع f:

$$F_1 = x^3 \quad F_2 = x^3 + 2 \qquad F_3 = x^3 + 97 \;\; \dots \dots$$

مبرهنة (تمثيل التوابع الأصلية):

إذا كان F تابعاً أصلياً للتابع f على مجال I عندئذ, يكون G تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I إذا وفقط إذا كان $G(x) = F(x) + c$ من أجل كل x من I، حيث c ثابت.

مثال (حل معادلة تفاضلية)

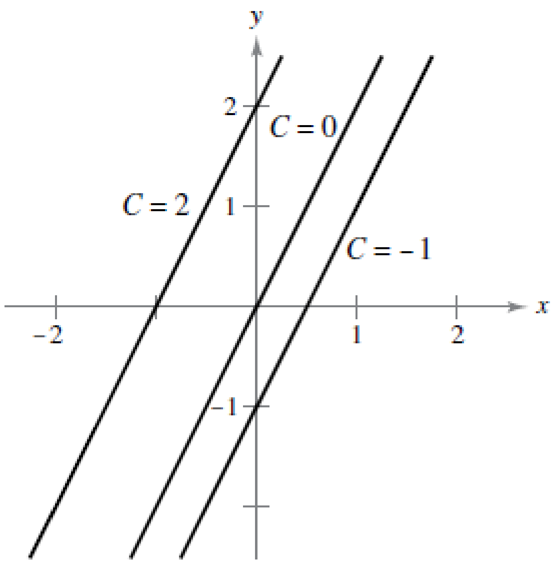
أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = 2$$

الحل: هدفنا البحث عن تابع مشتقه يساوي 2،

بتطبيق المبرهنة السابقة نستنتج أن الحل العام

هو: $y = 2x + c$.



Functions of the form $y = 2x + C$

عند حل معادلة تفاضلية من الشكل: $f(x) = \frac{dy}{dx}$، من المناسب كتابتها بالشكل

$dy = f(x)dx$، نعدو عملية إيجاد كافة حلول هذه المعادلة بإيجاد التابع الأصلي (التكامل غير المحدود)

ونرمز له بـ $\int$.

يشار إلى الحل العام بـ $y = \int f(x)dx = F(x) + c$ ويقرأ تكامل التكامل f بالنسبة للمتحول x.

$$y = \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \overbrace{dx}^{\text{Variable of integration}} = \underbrace{F(x)}_{\text{An antiderivative of } f(x)} + \overbrace{C}^{\text{Constant of integration}}.$$

قواعد التكامل الأساسية Basic Integration Rules :

الطبيعة المتعاكسة للتكامل والاشتقاق تسمح لنا بكتابة ما يلي:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Integration is the "inverse" of differentiation.

وفوق ذلك، إذا كان $\int f(x)dx = F(x) + c$، يكون:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x).$$

Differentiation is the "inverse" of integration.

نبين بعض قواعد الاشتقاق من خلال الجدول:

Basic Integration Rules

Differentiation Formula	Integration Formula	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\,dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\,dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	Power Rule
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

أمثلة:

الخطوات

Original integral
⇩
Rewrite
⇩
Integrate
⇩
Simplify

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx \qquad \text{Constant Multiple Rule}$$

$$= 3\int x^1\,dx \qquad \text{Rewrite } x \text{ as } x^1.$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + C \qquad \text{Power Rule } (n = 1)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + C \qquad \text{Simplify.}$$

التكامل الأصلي	إعادة الصياغة	نتيجة التكامل	التبسيط
a. $\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b. $\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c. $\int 2\sin x\,dx$	$2\int \sin x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

أمثلة:

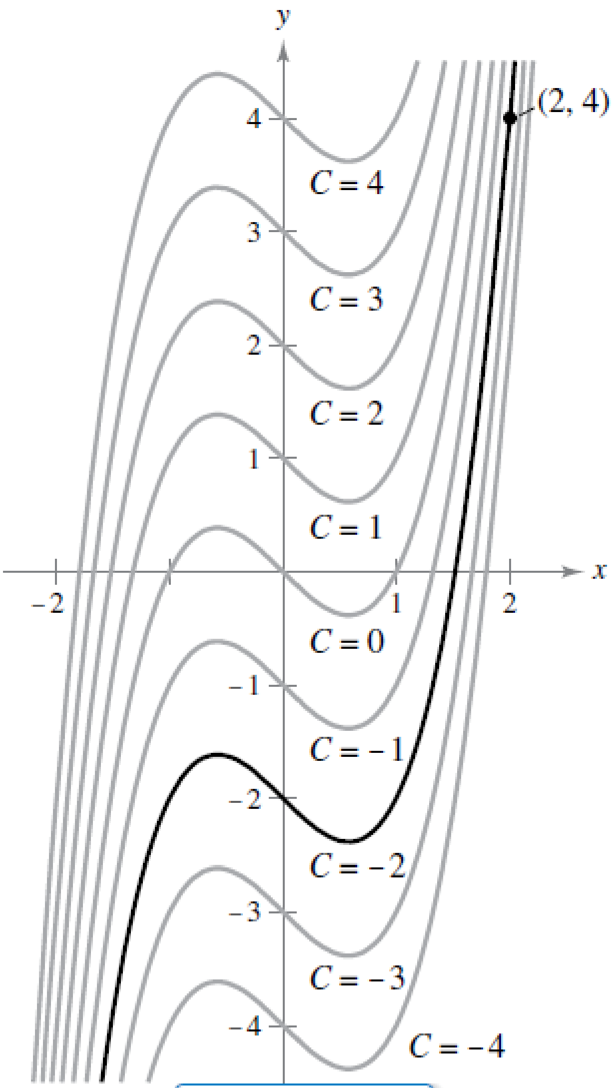
$$\int (x+2)dx = \int x dx + \int 2dx = \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_2 = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$\int (t^2+1)^2 dt = \int (t^4 + 2t^2 + 1)dt = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2})dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

الشروط البدائية والحلول الخاصة Initial Conditions and Particular Solutions



$F(x) = x^3 - x + C$

سبق ورأينا أن للمعادلة $y = \int f(x)dx$ العديد من الحلول (تختلف عن بعضها البعض بثابت). أي أن بيان أي من التوابع الأصلية ينتج عن انسحاب شاقولي لبيان التابع الآخر. الشكل المجاور يمثل بيانات عدة توابع أصلية لـ

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + c$$

(وذلك بإعطاء الثابت قيم مختلفة).

في كثير من التطبيقات، تعطى معلومات إضافية تساعدنا في تحديد ما يدعى بـ **الحل الخاص**: للقيام بذلك يكفي معرفة قيمة $y = F(x)$ من أجل قيمة ما لـ x ، هذه المعلومة تدعى بـ **الشرط الابتدائي**.

على سبيل المثال في الشكل المجاور، منحني أحد التوابع الأصلية يمر بالنقطة $(2,4)$ لمعرفة أي من هذه المنحنيات تمر من هذه النقطة نستخدم

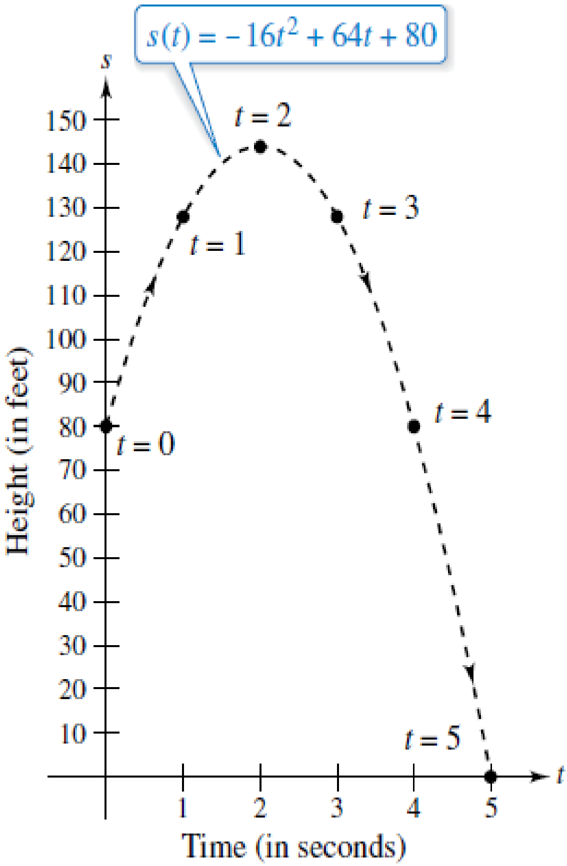
الحل العام : $F(x) = x^3 - x + c$

مع الشرط الابتدائي $F(2) = 4$، بالتعويض $F(2) = 8 - 2 + c = 4 \Rightarrow c = -2$، وبالتالي التابع $F(x) = x^3 - x - 2$ وهو الحل الخاص.

مثال: نرمي كرة نحو الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 64 feet/s ابتداء من ارتفاع ابتدائي مقداره 80 feet.

1. أوجد تابع موضع الكرة الذي يُعطي ارتفاع الكرة $S(\cdot)$ كتابع للزمن.
2. ما هو أقصى ارتفاع تصل له الكرة.

3. متى تصطدم الكرة بالأرض؟



الحل:

1. بوضع $t = 0$ نحصل على الشروط الابتدائية:

$$S(0) = 80 \quad S'(0) = 64$$

لنتذكر أن $S''(t) = a(t)$

وتعطى الجاذبية الأرضية بـ $s''(t) = -32$

ومنه:

$$s'(t) = \int s''(t)\, dt = \int -32\, dt = -32t + c_1$$

باستخدام السرعة الابتدائية:

$$S'(0) = -32(0) + c_1 = 64 \Rightarrow c_1 = 64$$

والآن نكامل تابع السرعة للحصول على تابع الموضع:

$$s(t) = \int s'(t)\, dt = \int (-32t + 64)\, dt = -16t^2 + 64t + c_2$$

باستخدام الارتفاع الابتدائي نحصل على:

$$s(0) = -16(0)^2 + 64(0) + c_2 = 80 \Rightarrow c_2 = 80$$

2. تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عندما يكون المماس الأفقي (الميل معدوم) ومنه:

$$s'(t) = 0 \Rightarrow -32t + 64 = 0 \Rightarrow t = 2$$

3. تصطدم الكرة بالأرض عندما:

$$s(t) = 0 \Rightarrow -16t^2 + 64t + 80 = 0 \Rightarrow t = -1 \quad or\ t = 5$$

وبالتالي الكرة تصطدم بالأرض عندما $t = 5$.

2. المساحة **Area**:

رمز المجموع Sigma Notation :

لنبدأ بإدخال المفهوم المختصر للمجموع، والذي نسميه رمز المجموع.

رمز المجموع Sigma Notation :

لكتابة مجموع n حد $a_1, a_2, a_3, \dots \dots, a_n$ على الشكل الآتي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$$

حيث i: دليل (عداد) المجموع و a_i الحد ذو الدليل i.

أمثلة:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{i=3}^{7} j^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{\sqrt{j}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(k^2 + 1) = \frac{1}{n}(1^2 + 1) + \frac{1}{n}(2^2 + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(n^2 + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

خواص المجموع التالية نحصل عليها ببساطة من خواص الجمع التبديلية والتجميعية:

$$\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i \, , \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Summation Formulas

1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$, c is a constant
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

مثال:

أوجد قيمة $\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2}$ for $n = 10, 100, 1000,$ and $10{,}000$.

الحل:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] \\
&= \frac{n+3}{2n}
\end{aligned}$$

الآن نعطي ل n القيم المطلوبة وسنوضحها في الجدول التالي:

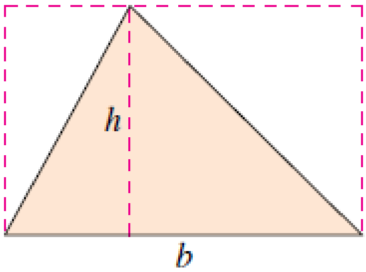
n	10	100	1000	10,000
$\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n+3}{2n}$	0.65000	0.51500	0.50150	0.5001[illegible]

المساحة:

في الهندسة الاقليدية، يعد المستطيل أبسط الأشكال الهندسية، حيث تعطى مساحته بالعلاقة التالية: $A = b\ h$

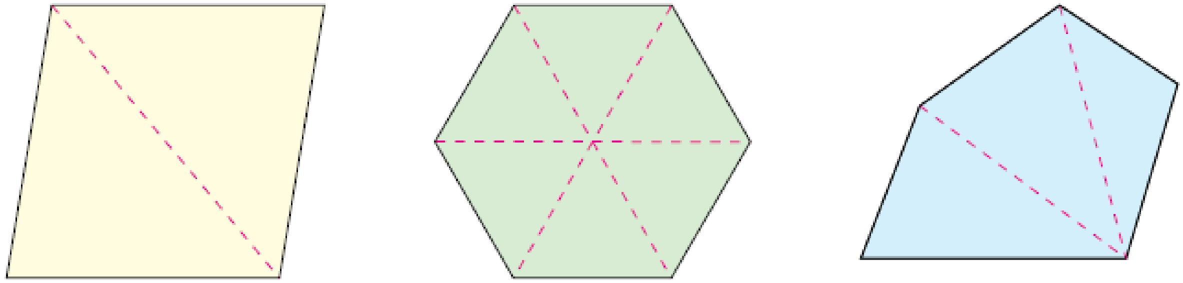
المساحة = القاعدة × الارتفاع.

من خلال هذا التعريف البسيط نستطيع الحصول على مساحة العديد من الأشكال الهندسية. على سبيل المثال:



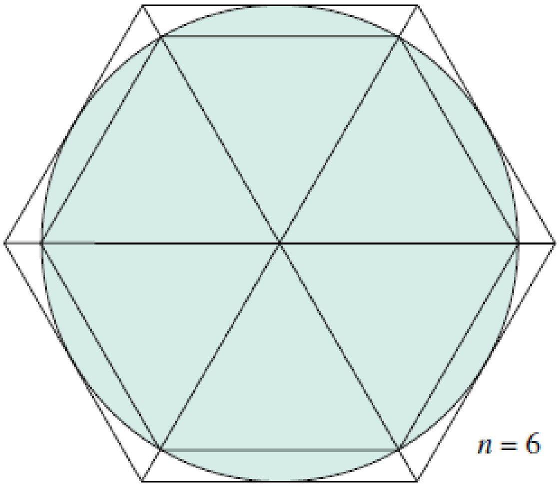
Triangle: $A = \frac{1}{2}bh$

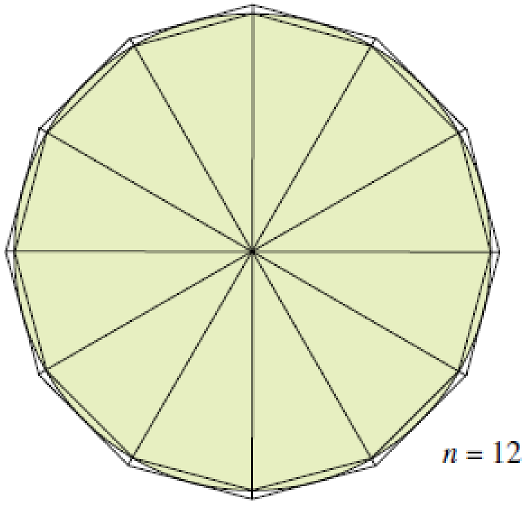
نستطيع حساب مساحة المثلث. نشكل من خلاله مستطيل مساحته تساوي ضعف مساحة المثلث، عند معرفة مساحة المثلث نستطيع حساب مساحة أي شكل مضلع من خلال تقسيمه إلى عدد من المثلثات كما هو مبين في الشكل أدناه:



Parallelogram Hexagon Polygon

يعد إيجاد مساحة الأشكال الدائرية أكثر صعوبة من إيجاد مساحة الأشكال المضلعة. لاحظ في الشكل أدناه لحساب مساحة الدائرة قمنا بتقسيمها إلى عدد من المثلثات فحصلنا على مضلع (حساب مساحته سهل) مساحة المضلع الناتج قريبة من مساحة الدائرة المطلوبة ونستطيع ملاحظة أنه كلما زادت عدد التقسيمات نحصل على مضلع مساحته أقرب من مساحة الدائرة المطلوبة.



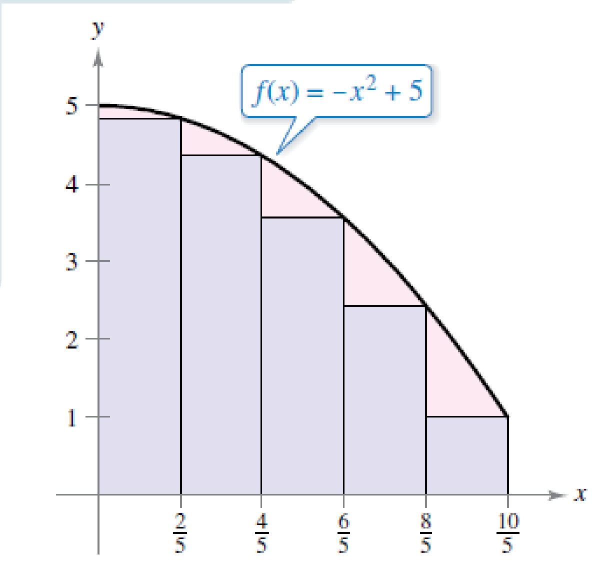


مساحة منطقة في مستوي The Area of a Plane Region

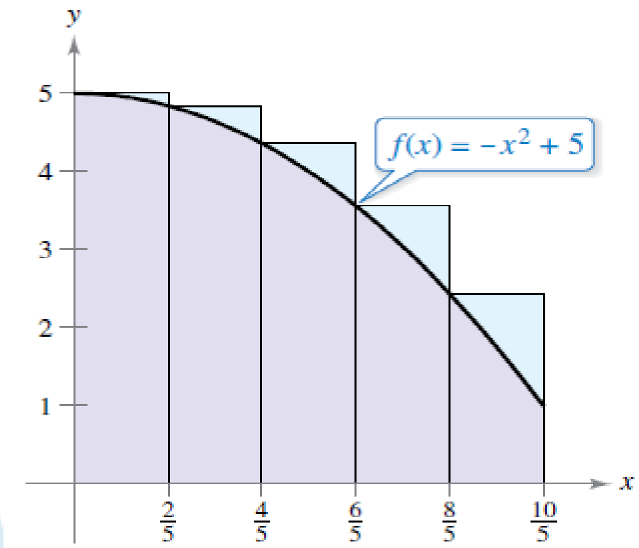
مسألتان مهمتان في علم التفاضل هما: والمعتمدتان بشكل أساسي على مفهوم النهاية هما: مسألة المستقيم المماس ومسألة المساحة.

مثال:

استخدم الخمس مستطيلات في كل من الشكلين السابقين لإيجاد تقريب للمساحة المحصورة بين منحني التابع $f(x) = x^2 + 5$ والمحور ox وذلك على المجال [0,2].



(a)



(b)

في الشكل (a): في هذه الحالة قمنا بتقسيم المساحة إلى خمس مستطيلات، قمنا بأخذ ارتفاعات المستطيلات على أساس أطراف المجالات اليمينية والتي هي: $x_k = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot i$ حيث $i = 1,2,3,4,5$، عرض كل من المستطيلات يساوي $\frac{2}{5}$ وارتفاع كل من المستطيلات $= f(x_k)$، ومنه يكون مجموع مساحات المستطيلات الخمس هو:

$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i}{5}\right)}^{\text{Height}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Width}} = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6.48.$$

وبما أن كل من المستطيلات الخمس يقع داخل المنطقة المحددة بالقطع المكافئ، تكون مساحة المنطقة المطلوبة أكبر من 6.48.

في الشكل (b): في هذه الحالة قمنا بتقسيم المساحة إلى خمس مستطيلات، قمنا بأخذ ارتفاعات المستطيلات على أساس أطراف المجالات اليمينية والتي هي: $x_k = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot (i-1)$ حيث $i = 1,2,3,4,5$، عرض كل من المستطيلات يساوي $\frac{2}{5}$ وارتفاع كل من المستطيلات $= f(x_k)$، ومنه يكون مجموع مساحات المستطيلات الخمس هو:

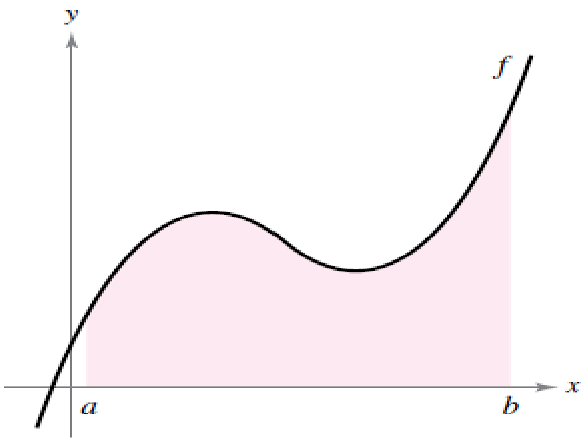
$$\sum_{i=1}^{5} \overbrace{f\left(\frac{2i-2}{5}\right)}^{\text{Height}} \overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)}^{\text{Width}} = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2 + 5\right]\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8.08.$$

وبما أن المنطقة المحددة بالقطع المكافئ تقع داخل المساحة الناتجة عن مجموع المستطيلات الخمس، وعليه تكون مساحة المنطقة المطلوبة أصغر من 8.08.

ومنه نستنتج أن المساحة المطلوبة تقع ضمن المجال]6.48,8.08[.

إيجاد المساحة عن طريق النهاية:

سنعمم المثال السابق من خلال أخذ منطقة في المستوي محدودة من الأعلى بمنحني تابع موجب مستمر $y = f(x)$ ومن الأدنى بالمحور ox ومن اليمن واليسار بالمستقيمات الأفقية $x = a$, $x = b$ كما هو مبين في الشكل المجاور.



لحساب مساحة هذه المنطقة بشكل تقريبي سنقوم بتقسيم المجال a, b إلى n مجال جزئي متساوي عرض كل منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$، أطراف هذه المجالات هي:

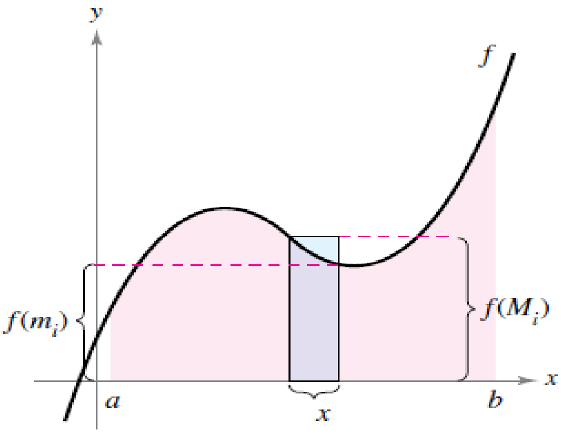
$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a = x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdots < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n = b}.$$

بما أن التابع f مستمر، نظرية القيمة الوسطى تضمن وجود قيمة عظمى وقيمة صغرى للتابع على كل مجال جزئي.

$f(m_i)$ القيمة الصغرى للتابع f على المجال الجزئي رقم i.

$f(M_i)$ القيمة العظمى للتابع f على المجال الجزئي رقم i.

سنقوم الآن بتشكيل مستطيلين قاعدة كل منهما Δx، الأول صغير بناء على ارتفاع القيمة الصغرى و الثاني مستطيل كبير بناء على ارتفاع القيمة العظمى. من الواضح أن مساحة المستطيل الصغير $\Delta x \cdot f(m_i)$ أصغر من مساحة المستطيل الكبير $\Delta x \cdot f(M_i)$.



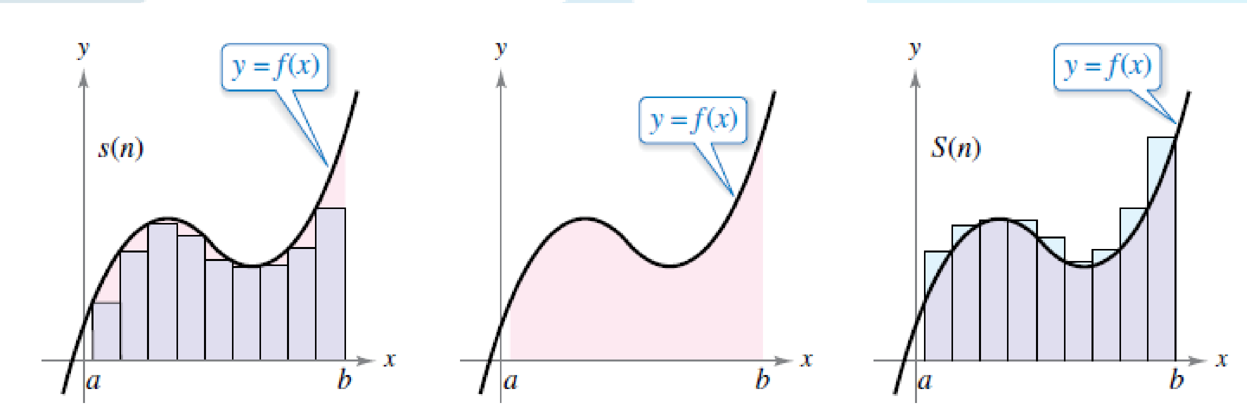
بأخذ مجموع كافة المستطيلات الصغيرة ذات الارتفاع $f(m_i)$ نحصل على ما يدعى بـ **المجموع السفلي**، وعلى ما يسمى بـ **المجموع العلوي** بأخذ مجموع كافة المستطيلات الصغيرة ذات الارتفاع $f(M_i)$.

$$\text{المجموع السفلي} = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$

$$\text{المجموع العلوي} = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$

بالنظر إلى الشكل أدناه نرى أن قيمة المجموع أصغر أو يساوي من المجموع الكلي، وفوق ذلك المساحة المطلوبة محصورة بينهما.

$$s(n) \le (\text{المساحة المطلوبة}) \le S(n)$$



مثال:

أوجد المجموع العلوي والمجموع السفلي للمنطقة المحصورة بين منحني التابع $f(x) = x^2$ والمحور ox و $x = 2$, $x = 0$.

الحل:

الخطوة الأولى: نقسم المجال $[0,2]$ إلى n مجال متساوي عرض كل منها

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$.

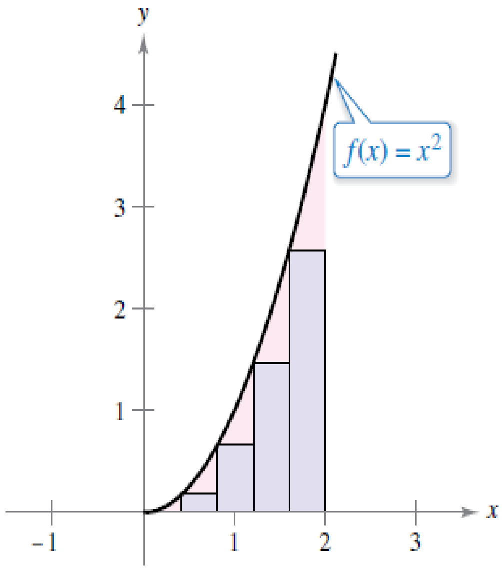
الخطوة الثانية: نجدد ارتفاع كل من المستطيلات من خلال تحديد القيمة العظمى والصغرى في كل مجال، بما أن التابع متزايد تماماً على المجال هذا يعني أن القيمة الصغرى عند الطرف الأيسر والقيمة العظمى عند الطرف الأيمن.

طرف المجال الأيمن

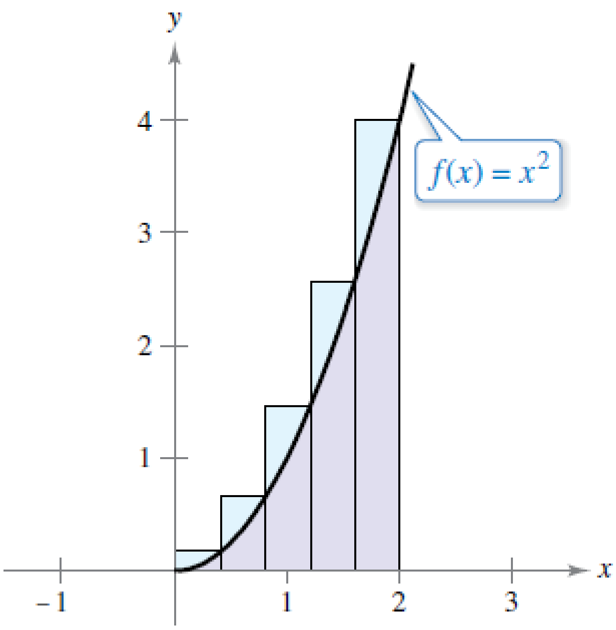
$$M_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$$

طرف المجال الأيسر

$$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n}$$



$$
\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2 - 2i + 1) \\
&= \frac{8}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{8}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n\right\} \\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 - 3n^2 + n) \\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \qquad \text{Lower sum}
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{4}{3n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) \\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Upper sum

نرى أن المجموع السفلي أصغر (أو يساوي) المجموع العلوي حيث:

$$s(n) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} < \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} = S(n)$$

كما نلاحظ أنه عندما تسعى n إلى ∞ يكون لكلا المجموعين نفس النهاية:

نهاية المجموع السفلي

$$\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

نهاية المجموع العلوي

$$\lim_{n \to \infty} S(n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

مبرهنة نهاية المجموع السفي والعلوي: (Limits of the Lower and Upper Sums)

ليكن f تابع مستمر وغير سالب على المجال $[a,b]$. نهاية كل من المجموعين السفلي والعلوي موجودة، وفوق ذلك تتساوى عندما n تسعى إلى اللانهاية.

$$\lim_{n \to \infty} s(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n \to \infty} S(n)$$

حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و كل من $f(m_i)$ و $f(M_i)$ تمثلان القيمة الصغرى والعظمى على الترتيب للتابع على المجال الجزئي i.

ملاحظة: ليس بالضرورة اختيار القيمة العظمى والصغرى للتابع إنما بإمكاننا اختيار قيمة كيفية من المجال الجزئي i ، حيث أن اختيار النقطة لا يؤثر على قيمة النهاية.

تعريف مساحة منطقة في المستوى Definition of the Area of a Region in the Plane

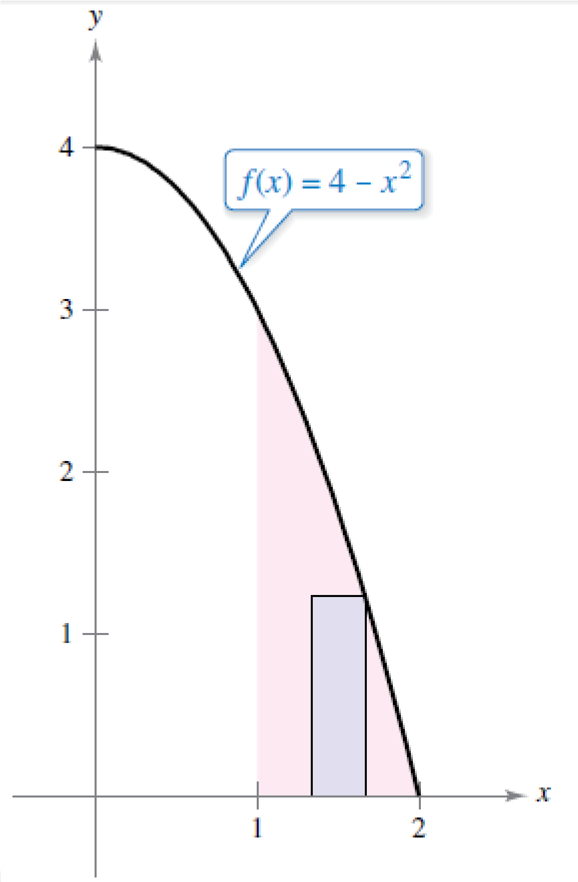
ليكن لدينا التابع الغير السالب المستمر $f(x)$. مساحة المنطقة المحدودة من الأعلى بمنحني التابع ومن الأدنى بالمحور ox ومن اليمين واليسار بالمستقيمات الأفقية $x = a\,, x = b$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$Area = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_{i-1} \le c_i \le x_i$.

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع $f(x) = x^2 - 4$ و المحور ox والنقطتين $x = 1\,, x = 2$.

الحل:



The area of the region bounded by the graph of f, the x-axis, $x = 1$, and $x = 2$ is $\frac{5}{3}$.

وغير سالب ومستمر على المجال $[1,2]$، بداية سنقوم بتجزئة

زء عرض كل منها

Δx. ونختر الأطراف اليمينية للمجالات:

ف اليمينية $\quad c_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n}$

جال جزئي نحصل على:

$$\text{Area} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[4 - \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{2i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right.\right.$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3}.$$ وهي المساحة المطلوبة

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع $f(y) = y^2$ و المحور oy والنقطتين $y =$ $0, y = 1$.

الحل:

ابع f معرف وغير سالب ومستمر على المجال [0,1]،

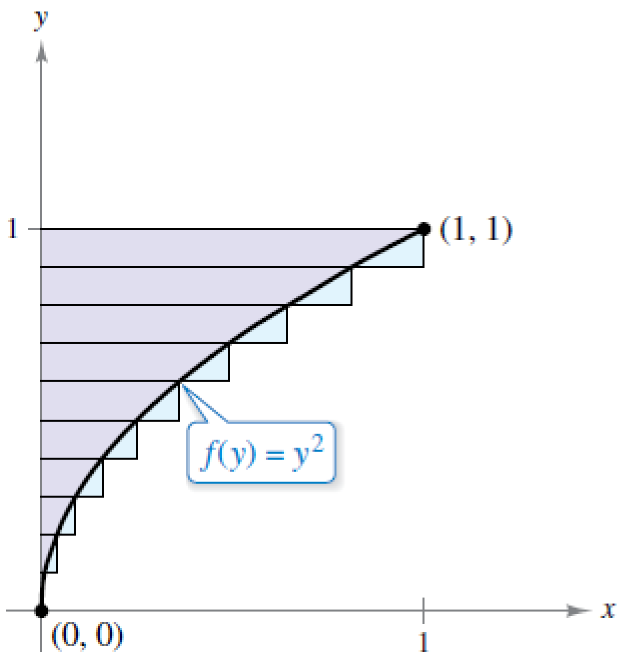
اية سنقوم بتجزئة المجال إلى n جزء عرض كل منها

$= \Delta y = \frac{b-a}{n}$. ونختر الأطراف العليا للمجالات:

$$c_i = a + i\,\Delta y = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta y \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

وهي المساحة المطلوبة



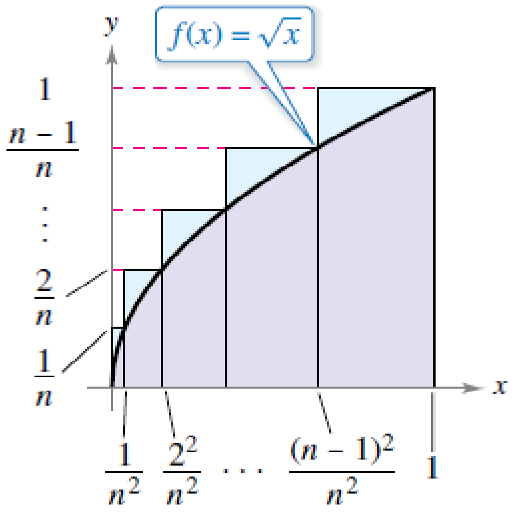
The area of the region bounded by the graph of f and the y-axis for $0 \le y \le 1$ is $\frac{1}{3}$.

مجاميع ريمان والتكامل المحدود:

في التعريف الذي عرضناه سابقاً، قمنا بتقسيم المنطقة إلى مستقيمات متساوية العرض، في مثالنا الآتي سنبين أن هذا الشرط غير ضروري.

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع $f(x) = \sqrt{x}$ والمحور ox والنقطتين $x = 0\,, x = 1$ أوجد قيمة النهاية $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$ حيث c_i تمثل أطراف اليمينة للمجالات الجزئية و Δx_i تمثل عرض المجال ذو الرتبة i.

الحل:



الحل: عرض المجال الجزئي i

$$\Delta x_i = \frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2}$$
$$= \frac{i^2 - i^2 + 2i - 1}{n^2}$$
$$= \frac{2i-1}{n^2}.$$

ومنه، قيمة النهاية:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i^2}{n^2}}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3}\left[2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6n^3}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$$
$$= \frac{2}{3}.$$

تعريف مجموع ريمان التكاملي: Definition of Riemann Sum

ليكن التابع f معرف على المجال المغلق $[a,b]$، وليكن Δ تقسيماً للمجال $[a,b]$ معطى بـ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

حيث Δx_i يمثل عرض المجال ذو الرتبة i : $[x_{i-1}, x_i]$، وإذا كانت c_i نقطة كيفية من المجال ذو الرتبة i فإننا نسمي المجموع التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,, \quad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

مجموع ريمان للتابع f من أجل التقسيم Δ.

ملاحظة:

نسمي عرض أكبر مجال جزئي من التقسيم بنظيم التقسيم ونرمز به $\|\Delta\|$، عندما $\|\Delta\|$ يسعى للصفر يجب أن يسعى عدد التقسيمات إلى اللانهاية بينما العكس غير صحيح.

ملاحظة:

في حال تساوي عرض كافة المجالات الجزئية، نقول عن التقسيم أنه منتظم ويكون:

$$\|\Delta\| = \Delta\, x = \frac{b-a}{n}$$

تنبيه: الشرط الوحيد أن يكون التابع معرف على المجال المغلق وليس بالضرورة أن يكون غير سالب أو مستمر.

تعريف التكامل المحدود Definition of definite integrals

ليكن التابع f معرف على المجال المغلق $[a, b]$، ولتكن نهاية مجموع ريمان على التقسيم Δ :

$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta\, x_i$ موجودة، عندئذ نقول عن التابع f أنه قابل للمكاملة على المجال المغلق $[a, b]$

ونرمز للنهاية بـ :

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta\, x_i = \int_a^b f(x)dx$$

تدعى هذه النهاية بالتكامل المحدود للتابع f من a إلى b.

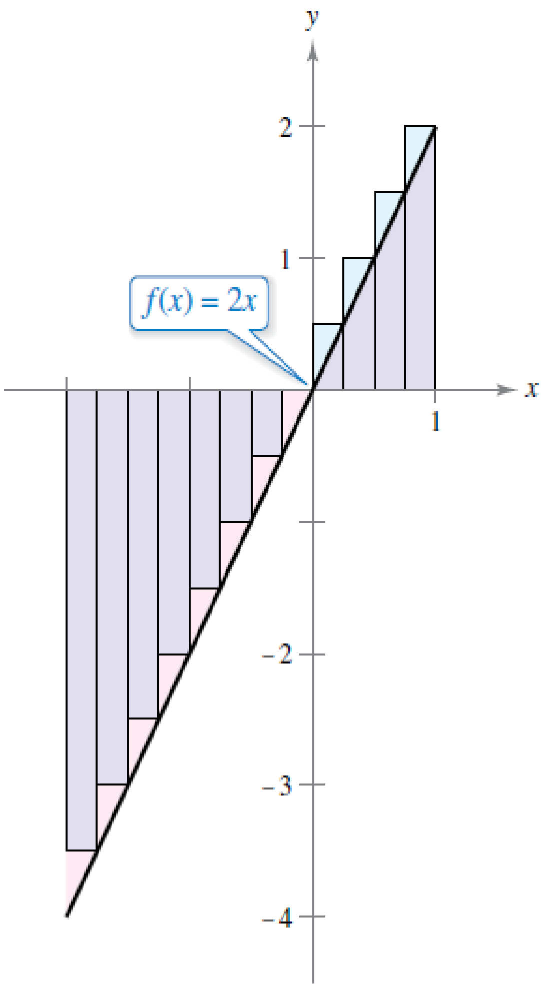
مثال: أوجد قيمة التكامل: $\int_{-2}^{1} 2x\, dx$:

الحل: التابع قابل للمكاملة على المجال المغلق $[-2,1]$، لنأخذ تقسيماً منظماً

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

وباختيار الأطراف اليمينة للمجالات كما يلي

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$



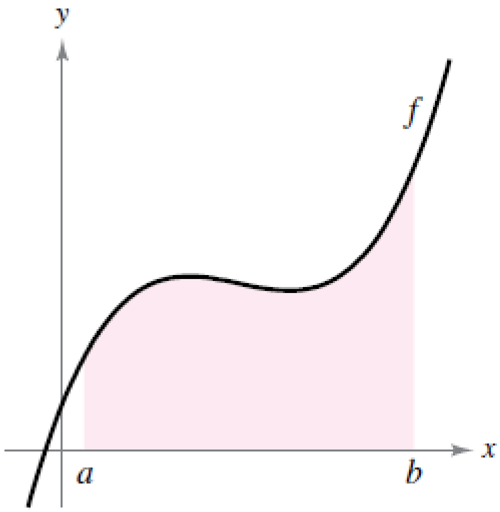
Because the definite integral is negative, it does not represent the area of the region.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\, dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2 + \frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} \left(-2\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6}{n} \left\{-2n + \frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(-12 + 9 + \frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$

مبرهنة التكامل المحدود كمساحة:

ليكن التابع f المعرف والمستمر وغير السالب على المجال المغلق $[a,b]$، مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع f والمحور ox بين النقطتين $x=a$ و $x=b$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$Area = \int_a^b f(x)dx$$



You can use a definite integral to find the area of the region bounded by the graph of f, the x-axis, $x = a$, and $x = b$.

أمثلة: أوجد قيمة التكاملات التالية:

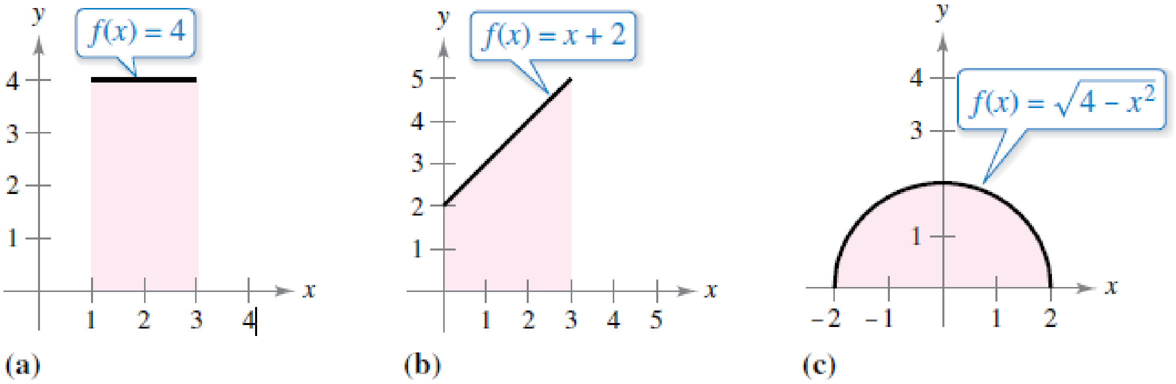
a. $\int_1^3 4\,dx$ **b.** $\int_0^3 (x+2)\,dx$ **c.** $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

الحل:

a. $\int_1^3 4\,dx =$ (مساحة المستطيل) $= 4(2) = 8$

b. $\int_0^3 (x+2)\,dx =$ (مساحة شبه المنحرف) $= \frac{1}{2}(3)(2+5) = \frac{21}{2}$

c. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$ (مساحة نصف الدائرة :) $= \frac{1}{2}\pi(2^2) = 2\pi$



خواص التكامل المحدود: Properties of Definite Integrals

1. إذا كان التابع f معرف عند النقطة $x = a$ عندئذ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. إذا كان التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ عندئذ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

3. إذا كان التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a, b]$ وكانت $c \in [a, b]$ عندئذ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

إذا كانت التوابع f, g توابع قابلة للمكاملة على المجال $[a, b]$ وكان k ثابت عندئذ التوابع kf و $f \pm g$ توابع قابلة للمكاملة:

4. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6. إذا كان التابع f قابل للمكاملة غير سالب على المجال المغلق $[a, b]$ عندئذ

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. إذا كان التابعين f, g قابلين للاشتقاق على المجال $[a, b]$ وكان

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

مثال:

أوجد قيمة التكامل إذا علمت أن: $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)$

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}, \qquad \int_1^3 x\,dx = 4, \qquad \int_1^3 dx = 2$$

الحل:

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\,dx &= \int_1^3 (-x^2)\,dx + \int_1^3 4x\,dx + \int_1^3 (-3)\,dx\\ &= -\int_1^3 x^2\,dx + 4\int_1^3 x\,dx - 3\int_1^3 dx\\ &= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2)\\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

النظرية الأساسية في التحليل الرياضي:

ليكن f تابع مستمر على المجال المغلق $[a,b]$، وكان F التابع الأصلي ل f على المجال $[a,b]$، عندئذ

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

مثال   احسب قيمة كل من التكاملا ت التالية:

$$\textbf{a.}\ \int_1^2 (x^2 - 3)\,dx \qquad \textbf{b.}\ \int_1^4 3\sqrt{x}\,dx \qquad \textbf{c.}\ \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$$

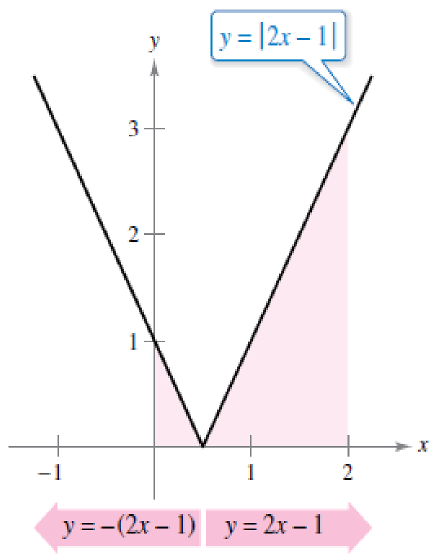
الحل:

$$\textbf{a.}\ \int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\textbf{b.}\ \int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

$$\textbf{c.}\ \int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

ثال 2:



The definite integral of y on $[0, 2]$ is $\frac{5}{2}$.

احسب قيمة التكامل:

$$\int_0^2 |2x - 1|\,dx.$$

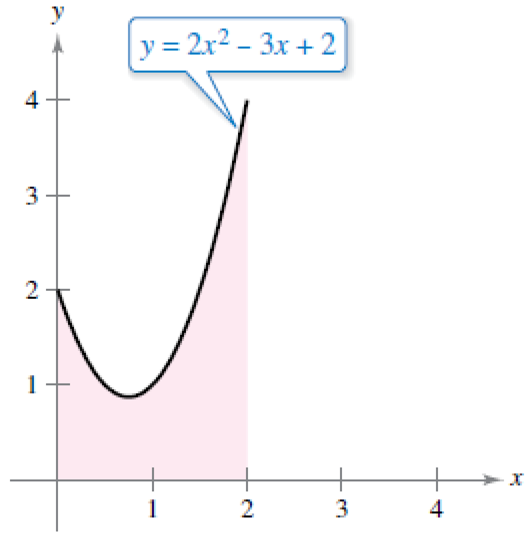
باستخدام خواص القيمة المطلقة:

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

وعليه نستطيع كتابة التكامل على جزئين:

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2x - 1|\,dx &= \int_0^{1/2} -(2x - 1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\,dx \\ &= \Big[-x^2 + x\Big]_0^{1/2} + \Big[x^2 - x\Big]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

مثال 3: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني التابع $y = 2x^2 - 3x + 2$ والمحور ox والخطين الشاقوليين $x = 0, \quad x = 2$.



The area of the region bounded by the graph of y, the x-axis, $x = 0$, and $x = 2$ is $\frac{10}{3}$.

$y > 0$ على المجال $[0, 2]$

$$\text{Area} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\, dx$$
$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0)$$
$$= \frac{10}{3}$$

النظرية الأساسية الثانية في التحليل الرياضي:

قيمة التكامل المحدود كما رأينا ثابتة حيث أن حدود التكامل ثوابت، في حال كانت حدود التكامل تتبع لمتغير عندئذ ناتج التكامل عبارة عن تابع لهذا المتغير.

التكامل المحدود التابع لـ x

F is a function of x.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Constant

f is a function of t.

التكامل المحدود الثابت

Constant

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Constant

f is a function of x.

مثال:

أوجد قيمة التابع $F(x)=\int_0^x \cos t\,dt$ عند النقاط $x=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^x \cos t\,dt=[\sin t]_0^x=\sin x-\sin 0=\sin x$$

$$\sin 0=0,\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مبرهنة:

إذا كان التابع f مستمر على المجال المفتوح I الذي يحوي a ، عندئذ من أجل كل $x\in I$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

مثال:

أوجد قيمة $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right].$

التابع $f(t)=\sqrt{t^2+1}$ مستمر على كامل مجموعة الأعداد الحقيقية

باستخدام النظرية الأساسية الثانية في التحليل نجد:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right]=\sqrt{x^2+1}.$$

تكامل معدل التغير:

إذا كان $F'(x)$ يمثل معدل تغير كمية ما $F(x)$، عندئذ التكامل المحدد لـ $F'(x)$ من a إلى b يعطي **التغير الكلي** أو **التغير الصافي** للتابع $F(x)$ على المجال $[a,b]$

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

مثال: يتدفق الماء إلى خزان بمعدل $\frac{m^3}{min}$ $r(t) = t^2$ ، كمية الماء المتدفقة إلى خزان الماء من الدقيقة الأولى إلى الخامسة تحسب كما يلي:

بما أن معدل التغير يمثل المشتق الأول للتابع الذي يمثل حجم الماء أي $V'(t) = r(t)$

$$V(5) - V(1) = \int_1^5 V'(t)\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^5 = \frac{124}{3}$$