كلية: الهندسة

اسم المقرر: الرياضيات المتقطعة

رقم الجلسة (السادسة)

التمرين 1:

برهن صحة مايلي:

$$p \downarrow (q \uparrow r) \neq (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$$

لدينا أن

$$\text{NOR } (\downarrow): p \downarrow q = \neg(p \lor q)$$

$$\text{NAND } (\uparrow): p \uparrow q = \neg(p \land q)$$

نحتاج إلى مقارنة التعبيرين. سنستخدم قوانين المنطق لتبسيط كل منهما ونرى إذا كانا متكافئين.

لنبسط الطرف الأيسر

$A = p \downarrow (q \uparrow r)$

$A = \neg(p \lor \neg(q \land r))$

باستخدام قانون دي مورغان على الجزء الداخلي: $\neg(q \land r) = \neg q \lor \neg r$

نجد: $A = \neg(p \lor (\neg q \lor \neg r)) = \neg(p \lor \neg q \lor \neg r)$

حسب قانون ديمورغان $A = \neg p \land \neg(\neg q \lor \neg r) = \neg p \land (q \land r)$

اذن $A = \neg p \land (q \land r)$

والطرف الأيمن

$B = (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$

$B = \neg(\neg(p \lor q) \land \neg(p \lor r))$

باستخدام قانون دي مورغان: $\neg X \land \neg Y = \neg(X \lor Y)$

هنا $X = (p \lor q)$ و $Y = (p \lor r)$

إذن: $\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \vee r) = \neg((p \vee q) \vee (p \vee r))$

$B = \neg(\neg((p \vee q) \vee (p \vee r))) =(p \vee q) \vee (p \vee r))$

$(p \vee q) \vee (p \vee r) = p \vee q \vee p \vee r = p \vee q \vee r$

إذن $B = p \vee q \vee r$

هل $A \equiv B$ ؟

$A = \neg p \wedge q \wedge r$

$B = p \vee q \vee r$

من الواضح تماما" أنهما ليسا متكافئين. على سبيل المثال، إذا كانت

$p = true, q = false, r = false$

فإن $A = false \wedge false \wedge false = false$

$B = true \vee false \vee false = true \quad \Rightarrow \quad A \neq B.$

$p \downarrow (q \uparrow r) \neq (p \downarrow q) \uparrow (p \downarrow r)$

اذن العبارة صحيحة

التمرين 2:

برهن صحة مايلي

:

$P \oplus C= P$

نبدأ من تعريف رابطة xor

$P \oplus Q=(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) P \oplus Q=(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$P \oplus Q=(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

اذن: $P \oplus C=(P \wedge \neg C) \vee (\neg P \wedge C)$

فنجد $P\oplus C=(P\wedge T)\vee(C)=P\vee C=P$

$$\boxed{P\oplus C=P}$$

تمرين3 :

اثبت ان $P\oplus P=C$

من تعريف رابطةxor الذي استنتجاه :

$$P\oplus P=(P\wedge\neg P)\vee(\neg P\wedge P)$$

نلاحظ ان كلا الحدين متناقضان منطقيًا :

- $P\wedge\neg P=false$
- $\neg P\wedge P=false$

$$P\oplus P=C\vee C=C$$

إذن

$$\boxed{P\oplus P=C}$$

تمرين4:

هل التكافؤ التالي محقق:

$$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r\equiv p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$$

سنثبت صحة التكافؤ او عدمه بالاعتماد على الخاصية التالية لرابطة xor

$$\boxed{\neg x\equiv x\oplus T}$$

- حيث يمكننا استنتاج الخاصية التالية التي سنستخدمها لاثبات صحة التكافؤ او عدمه لان الرابطة اذا وفقط اذا دائما معاكسة لرابطة xor

$$\boxed{p\leftrightarrow q\equiv\neg(p\oplus q)}$$

وبالاعتماد على الخاصية ان نفي x مساوي لناتج $x\oplus T$

$$\boxed{\neg(p\oplus q)\equiv(p\oplus q)\oplus T}$$

وبالتالي:

$$p\leftrightarrow q\equiv(p\oplus q)\oplus T$$

نجد ان الطرف الأيسر

$$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r=[(p\oplus q)\oplus T]\leftrightarrow r$$

(بتطبيق نفس التحويل $x\leftrightarrow y=(x\oplus y)\oplus T$) $x\leftrightarrow y=(x\oplus y)\oplus T$

$$[(p\oplus q)\oplus T]\leftrightarrow r=([(p\oplus q)\oplus T]\oplus r)\oplus T \quad (1)$$

وكذلك نجد ان الطرف الأيمن

1. $p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)=p\leftrightarrow[(q\oplus r)\oplus 1]$
2. $=(p\oplus[(q\oplus r)\oplus 1])\oplus 1 \quad (2)$

وبما أن XOR علاقة تجميعية وتبديلية نستنتج من (1)و(2) ان :

$$[(p\oplus q)\oplus 1]\oplus r)\oplus 1 \equiv(p\oplus[(q\oplus r)\oplus 1])\oplus 1$$

اذن التكافؤ التالي صحيح:

$$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r \equiv p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$$

تمرين5:

عبر لغويا عن عبارات التكميم التالية مع مثال توضيحي:

1-$\forall x\in D(p(x)\wedge\neg q(x)\rightarrow r(x))$

"لكل x في المجال D إذا كان x يحقق الإفادة p ولا يحقق الإفادةq ، فإنه يحقق الإفادة r "

2-$\exists x\in D[p(x)\wedge q(x)]\wedge\forall y\in D[q(y)\wedge r(y)\rightarrow s(y)]$

"يوجد عنصر x في المجال D يحقق الافادة p والافادة q معاً، وفي نفس الوقت، لكل عنصر y في المجالD ، إذا كان y يحقق الافادة q وr معاً، فإنه يحقق الافادة S.

- مثال:

طلاب الجامعة

- p(x)في السنة النهائية
- q(x)يدرس الرياضيات
- r(x)معدله فوق 90%
- s(x)حصل على منحة

تصبح العبارة: "هناك طالب في السنة النهائية يدرس الرياضيات، وكل طالب يدرس الرياضيات ومعدله فوق 90% يحصل على منحة".

3-$\forall x,y \in D[p(x,y) \wedge q(x,y) \to r(x,y)]$

"لكل زوج من العناصر x و y في المجالD ، إذا تحققت الافادة p بينهما والافادة q بينهما، فإن الافادة r تتحقق بينهما أيضاً".

مثال :

- D:أشخاص
- p(x, y): x وy أصدقاء
- q(x, y): x وy يعملون في نفس الشركة
- r(x, y): x وy يتعاونون في العمل

تصبح العبارة: "إذا كان شخصان x,yصديقين ويعملان في نفس الشركة، فإنهما سيتعاونان في العمل".

4-$\neg\forall x \in D[p(x) \to q(x)]$

التعبير اللغوي:

"ليس صحيحاً أن كل عنصر x في المجالD ، إذا كان يحقق p فإنه يحقق q "

أو بصيغة أخرى:

"يوجد على الأقل عنصر واحد في D يحقق p ولكنه لا يحقق q "

مثال:

- D:مجموعة الكتب في المكتبة
- p(x) كتاب علمي
- q(x) الكتاب مكتوب باللغة الإنجليزية

تصبح العبارة: "ليس كل كتاب علمي في المكتبة مكتوباً باللغة الإنجليزية" أو "هناك كتاب علمي على الأقل ليس مكتوباً باللغة الإنجليزية."

$5\text{-}\exists x\in D\forall y\in D[p(x)\vee\sim q(y)]$

التعبير اللغوي:

يوجد عنصر x في المجال D بحيث أنه لكل عنصر y في المجال D ، إما أن p(x) محققة أو q(y) غير محققة

مثال:

المجال = D :موظفو شركة

الخصائص:

- p(x): "x هو المدير التنفيذي"
- q(y): "y لديه راتب مرتفع"

التعبير اللغوي للمثال :يوجد موظف x في الشركة بحيث أن لكل موظف y في الشركة، إما أن x هو المدير التنفيذي أو أن y ليس لديه راتب مرتفع.

تمرين 6:

اكتب نفي العبارات التالية :

$1\text{-}\forall x\in D\ [p(x)\rightarrow q(x)]$

$$\neg\forall x\in D\ [p(x)\rightarrow q(x)] \equiv \exists x\in D\ \neg[p(x)\rightarrow q(x)]$$
$$\equiv \exists x\in D\ [p(x) \wedge \neg q(x)]$$

2-$\forall x,y \in D\ [p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)]$

$$\neg\forall x,y \in D\ [p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)] \equiv \exists x,y \in D\ \neg[p(x,y) \wedge q(x,y) \rightarrow r(x,y)]$$
$$\equiv \exists x,y \in D\ [p(x,y) \wedge q(x,y) \wedge \neg r(x,y)]$$

3-$\exists x\ \forall y \in D\ [p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y))]$

$$\neg\exists x\ \forall y \in D\ [p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y))] \equiv \forall x\ \neg\forall y \in D\ [p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y))]$$
$$\equiv \forall x\ \exists y \in D\ \neg[p(x,y) \rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y))]$$
$$\equiv \forall x\ \exists y \in D\ [p(x,y) \wedge \neg(q(x,y) \vee r(x,y))]$$
$$\equiv \forall x\ \exists y \in D\ [p(x,y) \wedge \neg q(x,y) \wedge \neg r(x,y)]$$

4- $\forall x \in D\ [(\exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow q(x)]$

$$\neg[\forall x \in D\ ((\exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow q(x))] \equiv \exists x \in D\ \neg[(\exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow q(x)]$$
$$\equiv \exists x \in D\ [(\exists y \in D\ p(x,y)) \wedge \neg q(x)]$$

5-$\forall x \in D\ \exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow (\forall x\ q(x))$

$$\neg[(\forall x \in D\ \exists y \in D\ p(x,y)) \rightarrow (\forall x\ q(x))] \equiv (\forall x \in D\ \exists y \in D\ p(x,y)) \wedge \neg(\forall x\ q(x))$$
$$\equiv (\forall x \in D\ \exists y \in D\ p(x,y)) \wedge (\exists x\ \neg q(x))$$

تمرين 7:اوجد مثال معاكس لصحة الاقتضاء التالي:

$$\forall x \in D[p(x) \vee q(x)] \Rightarrow \forall x \in D\ p(x) \vee \forall x \in D\ q(x)$$

يكون الاقتضاء $A \Rightarrow B$ غير صحيح اذا كانت A صحيحة و B غير صحيحة

مثال معاكس:

اذا كانت لدينا مجموعة التعريف Z

والافادات التالية

- "عدد زوجي x " p(x)
- "عدد فردي x" q(x)

نجد انه من اجل كل عدد من Z فانه اما زوجيا او فرديا مثلا اذا اخذنا x=1 فان الافادة p هي خاطئة والافادة q هي صحيحة وبالتالي $p(x)\vee q(x)$ هي صحيحة (اي ان العدد الصحيح اما ان يكون زوجيا او فرديا اي يحقق اما p وq) ..بينما اذا اخذنا الطرف الثاني فهي تعني ان كل الاعداد في D اما فردية جميعها أو زوجية جميعها وهو تكميم خاطئ

ومنه أثبت ان العبارة:

$$\forall x\in D p(x)\vee\forall x\in D q(x) \Rightarrow \forall x\in D[p(x)\vee q(x)]$$

افترض أن الطرف الأيسر صحيح، أي أن:

- إما أن **كل** عنصر في D يحقق $p(x)$ ،
- أو أن **كل** عنصر في D يحقق $q(x)$.

في الحالة الأولى، حين يكون $\forall x\in D\ p(x)$ $\forall x\in D p(x) \vee$ صحيحاً،

فإن لكل عنصر x في D، p(x) صحيحة، أو لكل عنصر x في D تكون الافادة q(x) صحيحة

إذن $\forall x\in D[p(x)\vee q(x)]$ صحيحة.

في كلتا الحالتين، نستنتج أن الطرف الأيمن صحيح. لذا، الاقتضاء صحيح.

إن الاقتضاء السابق صحيح باتجاه واحد :

$$\forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x) \Rightarrow \forall x \in D[p(x) \vee q(x)]$$

بينما الاقتضاء المعاكس غير صحيح أي:

$$\forall x \in D[p(x) \vee q(x)] \not\Rightarrow [\forall x \in D p(x) \vee \forall x \in D q(x)]$$

تمرين8:

أوجد بمثال معاكس صحة العبارة التالية:

$$\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x) \Rightarrow \exists x \in D[p(x) \wedge q(x)]$$

الحل: بفرض لدينا مجموعة التعريف التالية

$D=\{1,2,3,4,5\}$

- $p(x)$: "xيقبل القسمة على 2" (زوجي) x
- $q(x)$: " xيقبل القسمة على 3 "

- بفرض يوجد x=3 من مجموعة التعريف D يقبل القسمة على 3 وكذلك يوجد x=2 من مجموعة التعريف D يقبل القسمة على 2 فالعبارة $\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x)$ صحيحة
- اذا اخذنا الطرف اليميني . يوجد عدد يقبل القسمة على 2 وعلى 3 معاً"
- العدد الذي يقبل القسمة على 2 و 3 معاً هو المضاعف المشترك الأصغر 6
- في المجال D={1,2,3,4,5} لا يوجد العدد 6

اذن

- $\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x) \not\Rightarrow \exists x \in D\ (p(x) \wedge q(x))$

استنتج صحة العبارة التالية بالاستفادة من المثال السابق :

$$\exists x \in D[p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists x \in D p(x) \wedge \exists x \in D q(x)]$$

لوكانت x=6 تنتمي للمجموعة وهي تحقق الشرطين معا أي انها تقبل القسمة على 2 وتقبل القسمة على 3 معا"

وبالتالي يوجد عدد على الاقل مثلا هو $x=6$ يقبل القسمة على 2 ويوجد ايضا عدد على الاقل مثلا $x=6$ يقبل القسمة على 3

إن الاقتضاء التالي صحيح باتجاه واحد:

$$\exists x\in D[p(x)\wedge q(x)]\Rightarrow[\exists x\in D p(x)\wedge\exists x\in D q(x)]$$

والاقتضاء المعاكس غيرصحيح أي:

$$\exists x\in D p(x)\wedge\exists x\in D q(x)\not\Rightarrow\exists x\in D(p(x)\wedge q(x))$$

ملاحظة هامة:

نجد أن وجود عنصرين مختلفين يحققان افاديتين مختلفتين لا يضمن وجود عنصر واحد يحقق كلا الافاديتين معاً (الاقتضاء الثاني)

لكن اذا وجد هذا العنصر الذي يحقق افادتين معا فهذا يضمن انه يوجد عنصرعلى الاقل يحقق الافادة الاولى وعنصر على الاقل يحقق الافادة الثانية وهو العنصر نفسه(الاقتضاء الأول)

تمرين9 :اثبت صحة الافادات التالية:

$$\exists n\in Z,\ n\geq 100\wedge(n \text{ is prime})\wedge(n+2 \text{ is prime})$$

اذا افترضنا ان $p(n)=(n>=10)$

و $q(n)=n$ is prime

$$\exists n\in Z,\ p(n)\wedge q(n)\wedge q(n+2)$$

سنثبت بمثال ان التكميم الوجودي السابق محقق:

لدينا , $\exists n=101\in Z>100$ اي أن $p(n)$ محققة و$q(n)$ محققة وكذلك نجد انه من اجل $n+2$ ان $q(n+2)$ محققة لأن 103 ايضا عدد اولي.

تمرين 10 :

برهن باستخدام الاستقراء الرياضي ان:

يقبل القسمة على 3 $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad P(n) = (n^3 - n + 6)$

الحل: أي سنثبت ان القيمة الناتجة $n^3 - n + 6$ تقبل القسمة على 3 بالخطوات التالية:

1– من أجل n=1

$p(1) = 1 - 1 + 6 = 6$ اذن $p(1)$ الافادة $p(1)$ محققة

2– نفترض $P(k)$ صحيحة من اجل $k \geq 1$

$k^3 - k + 6 = 3m$ اي ان العلاقة تعطي عدد من مضاعفات 3 وبالتالي يقبل القسمة على 3

3– نريد إثبات $P(k+1)$ لدينا ان

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

نعوض في $p(k+1)$ فنجد :

$$P(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k + 1 + 6$$
$$= k^3 + 3k^2 + 2k + 6$$
$$= (k^3 - k + 6) + 3k^2 + 3k$$
$$= 3m + 3k^2 + 3k = 3(m + k^2 + k)$$

وبالتالي الافادة $p(k+1)$ من مضاعفات 3 وهو المطلوب اثباته اذن الافادة $p(n)$ صحيحة من احل اي عدد صحيح.