# Example

الجدول المبين في الشكل يعطي قياسات السرعة مع اللحظات الزمنية المقابلة لها لروبوت يتحرك بمسار مستقيم

| الزمن [s] | 0 | 0.2 | 0.4 |
|---|---|---|---|
| السرعة [cm/s] | 0 | 8 | 14 |

و المطلوب :

1 - احسب المسافة التي يقطعها الروبوت عند اللحظة **0.4 [s]**

**الحل:**

المسافة هي تكامل السرعة بالنسبة للزمن في

الفترة من 0 إلى 0.4 كما يلي :

$$distance = \int_0^{0.4} v\,dt$$

الحل العددي باستخدام قانون شبه المنحرف المركب حيث الفترة الزمنية من 0 إلى 0.4 مقسمة إلى مقطعين

$$D = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{1}{2}[f(x_0)+f(x_n)]+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right\}$$

$$D = \frac{0.4-0}{2}\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\right)$$

$$D = 0.2*(\frac{1}{2}0+8+\frac{1}{2}14) = 3[cm]$$

2 - احسب تسارع الروبوت عند اللحظة **0.2** [s]

**الحل:**

باستيفاء النقاط المعطاة بمنحني من الدرجة الثانية باستخدام طريقة**Lagrange Inetrpolation Polynomial**

$$l_N(x) = \sum_{m=0}^{N} y_m L_{N,m}(x) \text{ with } L_{N,m}(x) = \frac{\prod_{k\neq m}^{N}(x-x_k)}{\prod_{k\neq m}^{N}(x_m-x_k)} = \prod_{k\neq m}^{N}\frac{x-x_k}{x_m-x_k}$$

$$f_2(x) = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)}0 + \frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)}8 + \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)}14$$

$$f_2(x) = -25x^2 + 45x$$

على اعتبار أن التسارع هو مشتق السرعة نقوم باشتقاق كثير الحدود الناتج

$$f_2'(x) = -50x + 45$$

نعوض قيمة x=0.2

$$f_2'(0.2) = 35[cm/s^2]$$

و هي قيمة التسارع عند اللحظة **0.2 [s]**

3 - صمم البرنامج المناسب بلغة **Matlab** للتأكد من صحة القياسات في الجدول بحساب سرعة الروبوت خلال نفس المدة الزمنية بنفس الخطوة من خلال برمجة طريقة **Runge Kutta** إذا علمت أن المعادلة التفاضلية لسرعة الروبوت تعطى كما يلي :

$$2v' = 100 - 4v$$

**الحل:**

طريقة **Runge Kutta** تعطى بالمعادلات التالية :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

```
clc
clear all
syms f x y
h= 0.2;
f= 50-2*y;
X(1)=0;
Y(1) = 0;
xf=0.4;
for i=1:(xf-X(1))/h
  y=Y(i);
  x=X(i);
  k1=subs(f);
  y=Y(i)+0.5*k1*h;
  x=X(i)+0.5*h;
  k2=subs(f);
  y=Y(i)+0.5*k2*h;
  x=X(i)+0.5*h;
```

```
  k3=subs(f);
  y=Y(i)+k3*h;
  x=X(i)+h;
  k4=subs(f);
  Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
  X(i+1)=X(i)+h;
end
Y
```

**4** - إذا كانت العلاقة الزمنية لسرعة الروبوت [cm/s] و الناتجة عن حل المعادلة التفاضلية السابقة معطاة كما يلي:

$$v = 25 - 25e^{-2*t}$$

و المطلوب : تنفيذ خوارزمية الحل الرياضي لحساب الزمن اللازم لكي تصل سرعته إلى **22 [cm/s]** و ذلك باستخدام طريقة **Bisection** العددية (طريقة التنصيف) ضمن المجال الزمني **[0.5 2]** وبخطأ مقداره **0.001**

**ملاحظة: يكتفى بإجراء عمليتي تنصيف في الحل الرياضي مع تحديد مجال البحث التالي بعد عملية التنصيف الثانية , علماً بأن المطلوب حل رياضي و ليس برنامج حاسوبي**

**الحل:**

بالتعويض في معادلة السرعة:

$$22 = 25 - 25e^{-2t}$$

إذاً المطلوب إيجاد جذر المعادلة التالية:

$$f = 3 - 25e^{-2t}$$

نسمي بداية المجال a

و نهاية المجال b

$f(0.5) = -6.1970$

$f(2) = 2.5421$

$\varepsilon = b_0 - a_0 = 2 - 0.5 = 1.5$ >**0.001**

$r = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{2 + 0.5}{2} = 1.25$

$f(1.25) = 0.9479$

$a_1 = a_0 = 0.5, b_1 = r = 1.25$

$\varepsilon = b_1 - a_1 = 1.25 - 0.5 = 0.75$ >**0.001**

$r = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{1.25 + 0.5}{2} = 0.8750$

$f(0.875) = -1.3443$

$a_2 = r = 0.875, b_2 = b_1 = 1.25$

و هكذا يتم الاستمرار بتكرار عملية التنصيف إلى أن نحصل على الدقة المطلوبة

**5** - مستفيداً من علاقة السرعة المعطاة في الطلب **4** صمم البرنامج المناسب بلغة **Matlab** لحساب المسافة [cm] التي يقطعها الروبوت بعد **10 [s]** باستخدام طريقة **Euler** العددية بخطوة مقدارها **0.01 [s]**

**الحل :**

على اعتبار أن السرعة هي مشتق المسافة بالنسبة للزمن

و بالاعتماد على المعادلة التفاضلية السابقة

$$\frac{dx}{dt} = 25 - 25e^{-2*t}$$

$$f(t,x) = 25 - 25e^{-2*t}$$

```
syms f t x
h = 0.01
f = 25-25*exp(-2*t);
T(1) = 0;
X(1) = 0;
Tf = 10;
for i=1:(Tf-T(1))/h
   T(i+1)=T(i)+h;
   x=X(i);
   t=T(i);
   X(i+1)=X(i)+h*subs(f);
end
X
```