الإحصاء والاحتمالات – المحاضرة السابعة

Statistics and probabilities-Lecture 7

Dr Soummaya Abdul-Hak, Dr. Ali Ahmed
Doctor lecturer in statistics and programing

2025-2026

التوزيعات الاحتمالية الشهيرة

أولاً :التوزيعات الاحتمالية المنفصلة :

1.التوزيع على نقطتين:

بفرض X عدد مرات وقوع الحدث A في التجربة العشوائية. عندئذٍ يوصف هذا التوزيع بالشكل التالي:

X	0	1
P_i	q	p

أي: إما أن يقع الحدث A باحتمال p، وإما لا يقع باحتمال $q = 1 - p$ ومنه:

$$E(X) = \sum_i x_i P_i = p$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = p - p^2 = pq$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{pq}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;, & x < 0 \\ q \;, & 0 \le x < 1 \\ 1 \;, & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

$$\Psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_i e^{tx_i} P_i = q + p e^t$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3};\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

$$\Rightarrow \mu_3 = p(p-1)(p - {}^1\!/_2)$$

بالتالي:

$$\gamma = \frac{q-p}{2\sqrt{pq}}$$

فإذا كان:

- التوزيع متناظر بالنسبة لـ m : $p = q \Rightarrow \gamma = 0$
- التوزيع منحرف إلى اليسار: $p > q \Rightarrow \gamma < 0$
- التوزيع منحرف إلى اليمين: $p < q \Rightarrow \gamma > 0$

مثال

لتكن E تجربة إلقاء قطعة نقود متجانسة 6 مرات، فإذا رمزنا بـ X لعدد مرات ظهور الشعار خلال التجربة.

أوجد: $\Psi_X(t), \sigma(X), E(X)$

<u>الحل:</u>

نرمز بـ A لحدث ظهور الشعار في كل مرة من مرات تكرار التجربة. عندئذٍ يكون:

$$p = p(A) = \frac{1}{2}$$

$$q = p(A^{/}) = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = n.p = 6\frac{1}{2} = 3$$

$$\sigma^2(X) = n.p.q = 6.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{1.5} \approx 1.2247$$

$$\Psi_X(t) = (q + pe^t)^n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t)^6$$

وبما أن: $p = q$ فالتوزيع متناظر حتماً.

<u>2. توزيع ثنائي الحدين: Bernoulli Distribution $X : B(n, p)$</u>

يستخدم هذا التوزيع في التجارب العشوائية التي ينتج عنها إحدى نتيجتين: إما ظهور الحدث (النجاح) باحتمال: $P(A) = p$، وإما عدم ظهور الحدث (الفشل) باحتمال $q = 1 - p$.

شروط التوزيع:

- عدد مرات تكرار التجربة الذي نرمز له بالرمز n هو مستقل.
- الاحتمال ثابت من تكرار إلى آخر.
- إذا رمزنا بـ X لعدد مرات ظهور الحدث A (النجاح) عند تكرار التجربة العشوائية عدد من المرات مقداره n ، فإنّ قيم X الممكنة عندئذٍ من الشكل:

$$X : 0 , 1 , 2 , 3 ,..., i ,..., n$$

لنحاول استنتاج الشكل العام للتوزيع من خلال الملاحظات التالية:

- من أجل: $n=2$ ، وليكن المطلوب هو: النجاح مرة واحدة، والفشل مرة واحدة؟عندئذٍ: إما أن تكون التجربة الأولى هي النجاح والثانية الفشل، وإما أن تكون التجربة الأولى هي الفشل والثانية النجاح، أي:

$$P(X=1)=pq+qp=2pq=2p^1q^1=C_1^2\ p^1q^1$$

- من أجل: $n=3$ ، وليكن المطلوب هو: النجاح مرتين، والفشل مرة واحدة ؟عندئذٍ: إما أن يكون (نجاح، نجاح، فشل) أو (نجاح ،فشل، نجاح) أو (فشل، نجاح، نجاح) أي:

$$P(X=2)=ppq+pqp+qpp=3p^2q=C_2^3\ p^2q^1$$

وبالحالة العامة: إذا كان المطلوب ظهور الحدث A في التجربة عدد من المرات مقداره r مرة، وبالتالي عدم ظهوره $n-r$ مرة، حيث: n عدد مرات تكرار التجربة، عندئذٍ:

$P[X=r]=C_r^n p^r q^{n-r}$ وهو الشكل العام للتوزيع.

مما تقدم يكون جدول توزيع X من الشكل:

X	0	1	2	…	i	…
P_i	p_0	p_1	p_2	…	p_i	…

حيث $P_i=C_i^n\ p^iq^{n-i}$

أيضاً: $\sum_{i=0}^{n} C_i^n\ p^iq^{n-i}=(p+q)^n=1$, $\forall i: p_i\geq 0$

أضف إلى أنّ المتغيرات $X_i\ ; (i=\overline{1,n})$ مستقلة مثنى مثنى، وكلٍ منها يتوزع على نقطتين (أي: إما أن يقع، أو لا يقع)، وكذلك:

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n \Longrightarrow X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

يرمز عادةً لتوزيع ثنائي الحدين بالرمز: $X:B(n,p)$ لأنّه يعتمد على n و p ، وسمّي بتوزيع ثنائي الحد، لأن الصورة العامة للتوزيع تأخذ شكل "الحد العام" في مفكوك ذي الحدين.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

القيم المميزة لتوزيع ثنائي الحدين:

1. التوقع الرياضي

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}] = E\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i E[X_i]$$

$$= \underbrace{p + p + \cdots + p}_{\boldsymbol{n}\ \text{مرة}} = \boldsymbol{np}$$

2. التشتت و الانحراف المعياري

$$\boldsymbol{\sigma^2}[\boldsymbol{X}] = \sigma^2\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i \sigma^2[X_i] = \underbrace{pq + pq + \cdots + pq}_{\boldsymbol{n}\ \text{مرة}} = \boldsymbol{npq}$$

3. التابع المولد للعزوم

$$\Psi_X(t) = E(e^{tX}) = E(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} \Psi_{X_i}(t)$$

$$= \underbrace{(\ q + pe^t)(q + pe^t)\ldots(\ \ q + pe^t)}_{n} = \left[q + pe^t\right]^n$$

ومنه التابع المولد للعزوم لثنائي الحدين يعطى بالعلاقة

$$\Psi_X(t) = (q + pe^t)^n$$

4. عامل التناظر

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\ ;\ \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1{}^3$$

ومن العلاقة:

$$\alpha_i = \Psi_X{}^{(i)}(0);\ \Psi_X(t) = (q + pe^t)^n$$

ينتج:

$$\alpha_1 = np = \Psi_X'(0)$$
$$\alpha_2 = n(n-1)p^2 + np = \Psi_X''(0)$$
$$\alpha_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np = \Psi_X'''(0)$$

وبعد التبديل يكون:

$$\mu_3 = npq(q - p)$$

بالتالي:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

فإذا كان:

- $p = q$ يكون التوزيع متناظراً بالنسبة لتوقعه الرياضي.
- $p > q$ يكون التوزيع منحرفاً نحو اليسار.
- $p < q$ يكون التوزيع منحرفاً نحو اليمين.

مثال

يطلق رامٍ على هدف 10 طلقات، فإذا رمزنا بـ X لعدد الطلقات التي تصيب الهدف خلال هذه التجربة، وكان احتمال إصابته للهدف في كل مرة هو $\frac{1}{4}$. والمطلوب:

1. اكتب جدول توزيع X ومن ثم اوجد التوقع الرياضي و التشتت و التابع المولد للعزوم لعدد الطلقات التي تصيب الهدف و حدد شكل التوزيع
2. ما احتمال أن يصيب الهدف بطلقتين على الأقل؟

<u>الحل:</u>

1. بفرض A حدث إصابة الهدف، عندئذٍ: $P = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$

كما أن إطلاق 10 طلقات، يعني أن التجربة تتكرر $n = 10$ مرات. وبالتالي فإن جدول_توزيع X من الشكل:

X	0	1	2	...	i	...	10
P_i	p_0	p_1	p_2	...	p_i	...	p_{10}

والمسألة هي مسألة تجارب متكررة حيث: $P_i = C_i^n p^i q^{n-i}$. بالتالي ومباشرةً يكون:

$$E[X] = np = 10\left(\frac{1}{4}\right) = 2.5$$

$$\sigma^2[X] = n * p * q = 10\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{30}{16} \Rightarrow \sigma[X] = \frac{\sqrt{30}}{4}$$

$$\psi_X(t) = (q + pe^t)^n = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^t\right)^{10}$$

$p < q \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow$ التوزيع غير متناظر نحو اليمين

2.

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - P_0 - P_1$$
$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} - 10\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$$

مثال

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من الأدوية الطبية هو 0.60، إذا تناول هذا الدواء 5 مصابين بهذا المرض ولنفرض المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا الدواء.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير؟
2. اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
3. احسب الاحتمالات التالية:
   - ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء؟
   - ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
   - ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟
4. احسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.
5. حدد شكل التوزيع.

الحل:

1. عدد حالات الاستجابة X متغير <u>منفصل</u> ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو : $X : \{x = 0,1,2,3,4,5\}$
2. شكل دالة الاحتمال: $n = 5$ ، $p = 0.60$ ، $q = 1 - p = 0.40$

$$P[X = r] = C_r^n p^r q^{n-r}$$
$$= C_r^5 (0.6)^r (0.4)^{5-r}; \;\; r = 0,1,2,3,4,5$$

3. حساب الاحتمالات:
   - حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء:

$$P[X = 3] = C_3^5 (0.6)^3 (0.4)^{5-3}$$
$$= \frac{5 * 4 * 3}{3 * 2 * 1} * 0.216 * 0.16 = 10 * 0.03456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0]$$
$$1 - [C_0^5 (0.6)^0 (0.4)^5] = 1 - 1 * 1 * 0.01024 = 0.98976$$

- حساب احتمال استجابة **2** مرضى على الأكثر:

$$\begin{aligned} P[X \leq 2] &= P[X = 2] + P[X = 1] + P[X = 0] \\ &= C_2^5 (0.6)^2 (0.4)^3 + C_1^5 (0.6)^1 (0.4)^4 + C_0^5 (0.6)^0 (0.4)^5 \\ &= \frac{5 * 4}{2 * 1} (0.36)(0.064) + \frac{5}{1} (0.6)(0.0256) + 1(1)(0.01024) \\ &= 0.2304 + 0.0768 + 0.01024 = 0.31744 \end{aligned}$$

2.

$$m_X = npq = 5 * 0.60 = 3$$
$$\sigma^2 = npq = 5(0.60)(0.40) = 1.2$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

3. تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.

إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.

إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.

مثال

إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي $\Psi_X(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^t\right)^5$

ما هو التوزيع الذي يتبعه X؟ اكتب دالة كثافة الاحتمال و أوجد التوقع الرياضي و الانحراف المعياري .

الحل :

التوزيع يخضع لثنائي الحدين $X: B\left(5, \frac{1}{3}\right)$

$$P[X = i] = C_i^5 \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{5-i} \quad ; \quad i = 0,1,2,3,4,5$$

$$m_X = np = 5 * \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sigma^2 = npq = 5(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{10}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{10}{9}}$$

مثال

باستخدام توزيع ذى الحدين يمكننا إيجاد احتمال الحصول على **4** صور فى**6** رميات لعملة متوازنة كالآتي

$$P(4) = \frac{6!}{4!(6-4)!}(1/2)^4(1/2)^2 = \frac{6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1*2*1}(1/16)(1/4) = 15(1/64) = \frac{15}{64} \cong 0.23$$

إن عدد الصور المتوقع في ست رميات هو $E[X] = np = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

ويكون الانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالي لست رميات هو

$$\sigma[X] = \sqrt{npq} = \sqrt{6 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

وهذا التوزيع متماثل لأن **p=0.5** .

مثال

باعت إحدى شركات الحاسب 5 حواسيب مكفولة لـ 5 محاسبين لهم نفس طبيعة العمل ، وطبقاً لجداول المواصفات القياسية للحواسيب فإن احتمال أن حاسباً سيعمل 5 سنوات دون عطل هو $\frac{2}{3}$ أوجد أنه بعد 5 سنوات :

١- كل الحواسيب تعمل دون عطل .

٢- ثلاثة حواسيب على الأقل تعمل .

٣- حاسبان بالضبط يعملان .

الحل : نرمز $C_n^m = \binom{m}{n}$

1.

$$p(X=5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^{5-5} = \frac{32}{243} = 0.13$$

2.

$$p(X \geq 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{112}{243} = 0.46$$

.3

$$P[X=2] = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243} = 0.16$$

3. توزيع بواسون: Poisson Distribution

هو توزيع يُستخدم لوصف عدد الأحداث التي تحدث في فترة زمنية معينة أو في مساحة معينة، عندما تكون هذه الأحداث نادرة نسبياً، أي احتمال نجاحها صغير جداً و يقترب من الصفر واحتمال الفشل كبير و يقترب من الواحد.

يستخدم هذا التوزيع بشكل شائع في مجالات متعددة مثل علم الحاسوب والاتصالات و تحليل البيانات و يَصلُح بشكل عام للأحداث النادرة الوقوع أو للمتغيرات التي تحدث في أزمنةٍ عشوائيةٍ معلومة. مثلاً: عدد المكالمات الهاتفية خلال فترة محددة، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة كتاب ما،عدد السيارات المارة في مكان ما خلال فترة زمنية محددة وما شابه

شروط التوزيع:

1. المحاولات مستقلة.
2. الاحتمال ثابت من محاولة إلى أخرى.
3. قيم X الممكنة هي: $X: 0,1,2, \ldots$

تعريف

نقول عن المتغير العشوائي المنفصل X أنّه يخضع لتوزيع بواسون بالوسيط $\lambda = np$ وإذا فقط كان لـه جدول التوزيع التالي:

X	0	1	2	…	i	…
P_i	p_0	p_1	p_2	…	p_i	…

حيث:

$$P[X=i] = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}; \qquad i = 0,1,2,\ldots \;\; and \; (\lambda = np)$$

λ مقدار موجب و يمثل متوسط عدد مرات وقوع الحدث (أي التوقع الرياضي) و X عدد مرات وقوع الحدث المفترض. ومن الواضح أنّ:

$$\sum_i P_i = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

وهذا متوقع بالطبع.

القيم المميزة لتوزيع بواسون:

حسب (ماك–لوران) في النشر يكون:

$$\psi_X(t) = E[e^{Xt}] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}$$

$$\Longrightarrow \quad \psi_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

نشتق التابع المولد للعزوم للحصول على العزوم الابتدائية حتى المرتبة الثالثة

$$(\psi_X(t))' = \lambda e^t\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)$$

$$\alpha_1 = E(X) = (\Psi_X(0))' = \lambda$$

$$\alpha_2 = (\psi_X(t))''|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Longrightarrow \sigma^2(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \lambda = \mu_2 \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

$$\alpha_3 = (\psi_X(t))'''|_{t=0} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

ومنه

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \Longrightarrow \mu_3 = \lambda$$

ومنه عامل التناظر

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} > 0$$

أي أن توزيع بواسون دوماً غير متناظر و منحاز نحو اليمين

مثال

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2. اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
3. احسب الاحتمالات التالية:
   - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
   - احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
   - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
4. احسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
5. حدد شكل التوزيع.

الحل:

1. عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو $X: 0,1,2, \dots$

شكل دالة الاحتمال:.

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\lambda = 3$، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda};\ i = 0,1,2, \dots$$

$$\Longrightarrow P_i = \frac{3^i}{i!} e^{-3}; i = 0,1,2, \dots$$

3. حساب الاحتمالات:

■ حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر

$$P[X = 2] = \frac{3^2}{2!} e^{-3}$$

■ احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

a. $P[X \geq 1] = P[X = 1] + P[X = 2] + \cdots$

$$= 1 - P[X < 1] = \frac{3^0}{0!}e^{-3} = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

■احتمال أن أسرة ما تستهلك **3** وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \le 3) = P(3) + P(2) + P(1) + P(0)$$

$$= \frac{\epsilon^{-3}3^3}{3!} + \frac{\epsilon^{-3}3^2}{2!} + \frac{\epsilon^{-3}3^1}{1!} + \frac{\epsilon^{-3}3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498\,(13) = 0.6474$$

4. حساب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

في هذا التوزيع التوقع الرياضي يساوي التباين

أي أن:

$$\sigma^2 = \lambda = 3$$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.732$$

5. تحديد شكل التوزيع

دائما توزيع بواسون موجب الالتواء(غير متناظر و منحاز نحو اليمين)

مثال

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج نوع من اللمبات الكهربائية هي $\mathbf{0.02}$ وأن عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون. سحبنا عينة عشوائية من عشرة لمبات. المطلوب

1- إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير.

2- احتمال الحصول على لمبة واحدة معيبة.

3- احتمال الحصول على لمبة معيبة على الأكثر.

الحل :

1 . نسبة الوحدات المعيبة هي 0.02 أي

$$\boldsymbol{\lambda} = np = 10 * 0.02 = 0.2$$

و حيث أن X يتبع توزيع بواسون دالة كثافة الاحتمال هي

$$P[X = i] = \frac{(0.2)^i}{i!}e^{-0.2}; \qquad i = 0,1,2,\dots,10$$

2 . احتمال الحصول على لمبة واحدة معيبة

$$P[X=i]=\frac{(0.2)^1}{1!}e^{-0.2}=0.163746$$

3 . احتمال الحصول على لمبة معيبة على الأكثر.

$$P[X\le 1]=P[X=0]+P[X=1]$$
$$=\frac{(0.2)^0}{0!}e^{-0.2}+\frac{(0.2)^1}{1!}e^{-0.2}$$
$$=e^{-0.2}(1+0.2)=0.9825$$

مثال

يتلقى قسم الشرطة في المتوسط **5** مكالمات في الساعة فيكون احتمال تلقى مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً هو

$$P(X=2)=\frac{5^2e^{-5}}{2!}=\frac{(25)(0.00674)}{2}=0.08425$$

مثال

تشير الخبرة السابقة إلى أنه في المتوسط يتوقف **6** عملاء للتزود بالبنزين عند طرمبة بنزين كل ساعة . ما هو احتمال

1 . توقف **3** عملاء في ساعة ما ؟ 2 . **3** عملاء أو أقل في ساعة ما ؟

3 . ما هي القيمة المتوقعة ، أو الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل:

1 .

$$P(3)=\frac{6^3e^{-6}}{3!}=\frac{(216)(0.00248)}{3*2*1}=\frac{0.53568}{6}=0.08328$$

2 .

$$P(X\le 3)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)$$
$$P(0)=\frac{6^0e^{-6}}{0!}=\frac{(1)(0.00248)}{1}=0.00248$$
$$P(1)=\frac{6^1e^{-6}}{1!}=\frac{(6)(0.00248)}{1}=0.01488$$
$$P(2)=\frac{6^2e^{-6}}{2!}=\frac{(36)(0.0248)}{2.1}=0.04464$$
$$P(3)=0.08928(\text{from part a})$$

Therefore,

$$P(X\le 3)=0.00248+0.01488+0.04464+0.08928=0.15128$$

3. القيمة المتوقعة ، أو الوسط الحسابي ، لتوزيع يواسون هنا هو $\lambda = 6$ عملاء ، وانحراف معياري $\sqrt{\lambda} = \sqrt{6} \cong 2.45$

مثال:

إذا كان متوسط عدد الأخطاء في برنامج معين هو 3 أخطاء لكل 1000 سطر من الشيفرة. احسب احتمال وجود 5 أخطاء في 1000 سطر. ثم أوجد التابع المولد للعزوم لعدد الأخطاء في البرنامج واحسب قيمة عامل التناظر، ماذا تستنتج؟

الحل:

$\lambda = 3 \longrightarrow$ نطبق القانون $P[X = i] = \dfrac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

و منه

$$P[X = 5] = \frac{3^5}{5!} e^{-3} \cong 0.1016$$

التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة

$$\psi_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} = e^{3(e^t - 1)}$$

أما عامل التناظر فيعطى بالعلاقة

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

و توزيع بواسون دوماً غير متناظر و منحاز نحو اليمين

ملاحظة:

إذا كان عدد مرات التجربة في توزيع ثنائي الحدين كبير $n \geq 50$ واحتمال وقوع الحدث A المتعلق بالتجربة صغير وكان $np < 5$ ، فإنه يمكن الانتقال من توزيع ثنائي الحدين إلى بواسون وذلك بوضع $\lambda = np$

أي:

$$X: B(n, p) \xrightarrow[n>50 \ and \ np<5]{} X: Po(\lambda)$$

مثال

في اختبار لفعالية دواء ما، إذا فرضنا أنه ضار باحتمال 0.001، وأنه أعطي لـ 2000 شخص من المتبرعين. والمطلوب:

ما احتمال أن يتضرر أكثر من شخصين نتيجة تلقيهما هذا الدواء؟

الحل:

بفرض: A حدث ضرر شخص حيث $p = 0.001$

X عدد الأشخاص المتضررين باللقاح

إن إعطاء الدواء لـ2000 شخص يعني أن التجربة تتكرر $n = 2000$ مرة، وبالتالي يكون المطلوب:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2)$$
$$= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\} \; ;$$

ولكن لدينا $n = 2000 > 50$ و $np = 2000 * 0.001 = 2 < 5$

أي يمكن الانتقال من توزيع ثنائي الحدين إلى توزيع بواسون

$$X: B(n,p) \xrightarrow[n>50 \; and \; np<5]{} X: Po(\lambda)$$

أي $$X: B(2000,0.001) \xrightarrow[n>50 \; and \; np<5]{} X: Po(2)$$

$$\begin{aligned} P[X > 2] &= 1 - P[X \le 2] \\ &= P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] \\ &= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} \\ \\ &= 1 - 6e^{-2} \end{aligned}$$

4 . التوزيع الهندسي:Geometrical Distribution

بفرض E تجربة عشوائية، A حدث مرتبط بها، بحيث: $P[A] = p, P[\bar{A}] = q$

في هذا التوزيع تُكرَّر التجربة لعدد من المرات حتى يقع الحدث A لأول مرة / أي نوقف التجربة عندما يقع الحدث A للمرة الأولى

شروط التوزيع:

التجارب مستقلة.

p, q كلاهما ثابت.

إذا رمزنا بـ X لعدد مرات تكرار التجربة حتى وقوع الحدث A لأول مرة فإنّ قيم X تكون من الشكل: $X: 1,2,3, \dots, i, \dots$

فإذا فرضنا أنّ A قد وقع لأول مرة في التجربة رقم i ، فهذا يعني أنّه لم يقع خلال $(i - 1)$ مرة

بشكل عام: $P[X = i] = \underbrace{q * q * q * \dots * q}_{(i-1) \text{ مرة}} * p = q^{i-1}p$ وهي الصورة العامة للتوزيع.

ويكون جدول توزيع X من الشكل:

X	1	2	3	...	i	...
P_i	p	qp	q^2p	...	$q^{i-1}p$	...

واضح أنّ: $\sum_i P_i$ تشكل متتالية هندسية حدّها الأول p وأساسها $1 > |q|$ وبالتالي مجموعها يساوي الحد الأول مقسوما على الواحد مطروحاً منه الأساس:

$$\sum_i p_i = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

يرمز للتوزيع الهندسي بالرمز: $X: G(p)$ يخضع لتوزيع هندسي بالوسيط p

القيم المميزة للتوزيع الهندسي:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} ipq^{i-1} = p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'$$

وبما أنَّ $\sum_{i=1}^{\infty} q^i$ سلسلة هندسية حدّها الأول q وأساسها q يكون:

$$E[X] = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\psi_X(t) = E[e^{Xt}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{x_i t} q^{i-1} p\,; x_i \equiv i \Rightarrow \psi_X(t) = \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty} e^{it} q^i = \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}(qe^t)^i = \frac{p}{q}\frac{qe^t}{1-qe^t}$$

$$\Rightarrow \psi_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

$$\alpha_i = \psi'_X(0)$$

$$\psi'_X(t) = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$$

$$\alpha_1 = \psi'_X(0) = \frac{1}{p}$$

$$\alpha_2 = \psi''_X(0) = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\sigma^2[X] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{q}{p^2}$$

$$\Rightarrow \sigma[X] = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

في التوزيع الهندسي دوماً عامل التناظر موجب $\gamma > 0$ غير متناظر ومنحاز نحو اليمين دوماً

مثال

صندوق يحوي 10 كرات حمراء و6 كرات خضراء. نسحب كرة من الصندوق مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر كرة خضراء لأول مرة. والمطلوب:

ادرس المتحول العشوائي X المعبّر عن هذه التجربة.

ما احتمال أن تُكرر التجربة 6 مرات؟

الحل

A حدث سحب كرة خضراء، حيث: $P[A] = p = \frac{6}{16} \Rightarrow q = \frac{10}{16}$

X عدد مرات تكرار التجربة حتى ظهور الحدث المفترض

ومن الواضح أن: $X: G\left(\frac{6}{16}\right)$ وبالتالي يكون:

$$\Psi_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} = \frac{\frac{6}{16}e^t}{1-\frac{10}{16}e^t}$$

حيث $\alpha_i = \psi_X^{(i)}(0)$ ومنه يمكن الاشتقاق مرتين لحساب (α_1, α_2) ومن ثم $\sigma^2[X]$

أو يمكن أن نكتب مباشرةً:

$$\alpha_1 = E[X] = \frac{1}{p} = \frac{16}{6}$$

$$\sigma^2[X] = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{10}{6}}{\left(\frac{6}{16}\right)^2} = \frac{160}{36}$$

ومنه:

$$\sigma(X) = \frac{4\sqrt{10}}{6}$$

$$P(X=6) = (\frac{6}{16})(\frac{10}{16})^{6-1} = (\frac{6}{10})(\frac{10}{16})^5$$

حيث: $P[X = i] = q^{i-1}p$

مثال

في نظام اتصال ، احتمال وصول رسالة بنجاح هو $p = 0.6$. ما متوسط و تشتت عدد محاولات الارسال المطلوبة حتى يتم استلام الرسالة بنجاح؟

الحل

$$p = 0.6 \Rightarrow q = 0.4$$
$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.6} \cong 1.67$$
$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{0.4}{(0.6)^2} \cong 1.11$$