جَـامعة المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

كلية الصيدلة	السنة الأولى
٢٠٢٥-٢٠٢٦	

الرياضيات

المحاضرة الخامسة

د. زياد اليوسف

صيغ مشتقات التوابع المعروفة (Common Derivatives Formulas)

الجدول التالي لصيغ مشتقات الدوال المعروفة

Common Derivatives Formulas

f (x)	f`(x) /derivative of f
1) $y = a$; عددثابت a	$y' = 0$
2) $y = x$; هو متحول x	$y' = 1$
3) $y = x^n$; عددثابت n	$y' = n\,(x)^{n-1}$
4) $y = u^n(x)$; عددثابت n	$y' = n\,u'(x)\,u(x)^{n-1}$
5) $y = \sin u(x)$; $u(x)$تابع	$y' = u'(x)\cos u(x)$
6) $y = \cos u(x)$	$y' = -u'(x)\sin u(x)$
7) $y = e^{u(x)}$	$y' = u'(x)e^{u(x)}$
8) $y = \ln u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{x}$
9) $y = u(x).v(x)$;	$y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
10) $y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

11) $y = \sqrt{u(x)}$	$y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
12) $y = tg\, u(x)$	$y' = \frac{u'(x)}{cos^2 u(x)}$
13) $y = cotg\, u(x)$	$y' = \frac{-u'(x)}{sin^2 u(x)}$
14) $y = arctg(x)$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
15) $y = arc\, cotg(x)$	$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$
16) $y = arctg\, (\frac{x}{a})$	$y' = \frac{a}{a^2 + x^2}$
17) $y = arccotg\, (\frac{x}{a})$	$y' = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
18) $y = arc\, tg(u(x))$	$y' = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$
19) $y = arc\, cotg(u(x))$	$y' = \frac{-u'(x)}{1 + u(x)^2}$
20) $y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
21) $y = arc\cos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

22) $y = arc\ \sin(\frac{x}{a})$	$y^{`} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
23) $y = arc\ \cos(\frac{x}{a})$	$y^{`} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
24) $y = arc\ sin\ (u(x))$	$y^{`} = \frac{u^{`}(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
25) $y = arc\ \cos(\ u(x))$	$y^{`} = \frac{-u^{`}(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$
26) $y = a^{u(x)}$	$y^{`} = a^{u(x)} \ln a . u^{`}(x)$; a>0

النهايـــات (Limites)

1. نـهايات الـدوال Functions Limites

1.1. تعريف النهاية Limite Definition

إذا كانت الدالة f معرفةً على المجال المفتوح المتضمن للعدد x_0 (من الممكن استثناء x_0 نفسها)، إن نهاية الدالة $f(x)$ هي l عندما x تؤول إلى x_0 وتعطى بالعلاقة

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,, \quad l \epsilon R$$

بمعنى آخر للدالة نهاية إذا كانت تغيرات الدالة $f(x)$ في النقطة x_0 تقترب converge من قيمة معينة هي l.

مثال(1): أوجد $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 3)$.

<u>الحل:</u>

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 3) = 9 \epsilon R$$

إذاً $f(x)$ تقترب من 9 عندما $x \to 2$.

مثال(2.[illegible]): أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}$.

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن الدالة غير معرّفة عند $x = 1$ لأننا سنحصل على $\frac{0}{0}$ لذلك نحاول التخلص منها بالشكل

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = 2x+3 \text{ ؛ } x \neq 1$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x+3 = 5$$

إذاً $f(x)$ تقترب من 5 كلما اقتربت x من 1 (لاحظ أنه لا يمكن التعويض مباشرة بـ $x = 1$)

1.2. النهاية من اليمين والنهاية من اليسار Limite from right and Left

بعد أن تعرفنا على نهاية الدالة لنبحث في نهاية الدالة من اليمين واليسار. وإذا كانت الدالة f معرفة على المجال المفتوح المتضمن للعدد a (من الممكن استثناء a نفسها) فإننا:

1) نقول أن العدد الحقيقي l هو نهاية الدالة $f(x)$ من اليمين في النقطة a عندما $x \to a$ بقيم أكبر من a إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

وتعطى هذه النهاية بالشكل:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l, \quad l \epsilon R$$

2) نقول أن العدد الحقيقي l هو نهاية الدالة $f(x)$ من اليسار في النقطة a عندما $x \to a$ بقيم أكبر من a إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

وتعطى هذه النهاية بالشكل:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l, \quad l \epsilon R$$

3) إذا كانت الدالة f معرفة على المجال المفتوح المتضمن للعدد a (من الممكن استثناء a نفسها) فإن: $\lim_{x \to a} f(a) = l$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x) .$$

مثال(3): إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x+1; x > 1 \\ 1 \quad ; \qquad x \le 1 \end{cases}$ والمطلوب:

أوجد :

$\lim_{x\to1} f(x)$ ، $\lim_{x\to1^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to1^+} f(x)$ إن وجدت؟

الحل:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (3x+1) = 4$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (3x+1) = 1$$

وبما أن $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$ فإن $\lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة.

1.3. التباعد نحو اللا نهاية *Spacing towards infinity*

نقول عن الدالة $f(x)$ المعرفة في جوار النقطة x_0 أنها لا متناه في الكبر، إذا كان اقتراب x نحو x_0 يؤدي إلى اقتراب $f(x)$ من اللانهاية أي إذا كان: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

ونكتب ذلك كما يلي:

$$\forall N > 0,\ \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

مثال (4-): أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ لا متناه في الكبر في جوار النقطة 1 ؟

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

<u>تعريف:</u> نقول أن للدالة $f(x)$ نهاية في اللانهاية قدرها l إذا كان اقتراب $x \to \infty$ يؤدي إلى اقتراب $f(x)$ من l أي:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

مثال (5): أوجد نهاية التابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ في اللا نهاية؟

الحل:

نهاية التابع في اللا نهاية هي 2 لأن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

2. خواص النهايات Limites Properties

إذا كان:

$$\lim_{x\to a} f_2(x) = l_2 \ , \ \lim_{x\to a} f_1(x) = l_1 \ , \ \lim_{x\to a} f(x) = l$$

فإنه يكون:

1) إذا كان $\forall c \in R, \ f(x) = c$ فإن: $\lim_{x\to a} f(x) = c$ أي $\lim_{x\to a} c = c$

2) إذا كان $f(x) = x$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = a$ أي $\forall a \in R, \ \lim_{x\to a} x = a$.

3) $\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) = l_1 \pm l_2$

4) $\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) . \lim_{x\to a} f_2(x) = l_1 . l_2$

5) $\forall c \in R$ ؛ $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c.l$

6) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

7) $\forall n \in N; \lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

8) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} ; \forall n \in N$

ملاحظة: نهاية الدالة كثيرة الحدود عند النقطة a تساوي قيمتها عند هذه النقطة أي أنه إذا كان :

$$f(x) = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \cdots + a_2 . x^2 + a_1 . x + a_0$$

فإن $\forall a \in R , \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال(6): أوجد $\lim_{x\to 2}\left(x^2-7x+\frac{8x}{x+1}\right)$

الحل: لدينا

$$\lim_{x\to 2}(x^2-7x)=(2)^2-7(2)=-10$$

$$\lim_{x\to 2}(8x)=16 \quad ؛ \quad \lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

وحسب خواص النهايات نجد أن:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-7x+\frac{8x}{x+1}\right)=\lim_{x\to 2}(x^2-7x)+\frac{\lim_{x\to 2}(8x)}{\lim_{x\to 2}(x+1)}=$$

$$=-10+\frac{16}{3}=\frac{-14}{3}$$

مثال(7) أوجد نهاية الدالة $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{x^2+1}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^3-4)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)}=\frac{4}{5}$$

مثال(8): أوجد النهايات $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}$ ، $\lim_{x\to -8}\sqrt[3]{x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to x_0} x^{\frac{m}{n}} \quad ؛ \; n,m\in N, x_0>0$$

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$$

$$\lim_{x\to -8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(-8)}=-2$$

ولدينا حسب خواص النهايات:

$$\lim_{x\to x_0} x^{\frac{m}{n}}=\lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^m=x_0^{\frac{m}{n}}$$

3. نظرية الحصر (الشطيرة) Sandwich Theorem

وتسمى بنظرية الإحاطة أيضاً. إذا كانت الدوال h, f, g تحقق المتراجحة (المتباينة) $f_{(x)} \leq h_{(x)} \leq g_{(x)}$ لكل جوار يحوي x_0 (أو من الممكن أن لايحويها).

وكانت نهايات الدوال كالتالي $\lim_{x \to x_0} f_{(x)} = \lim_{x \to x_0} g_{(x)} = l$ فإن:

$$\lim_{x \to x_0} h_{(x)} = l\,; l \in R$$

مثال(9): أوجد النهاية $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$.

<u>الحل:</u>

نعلم أن $-1 < \sin\frac{1}{x} < 1$ عندما $x \to 0 \Leftarrow$

فإن $-x^2 < x^2 \sin\frac{1}{x} < x^2$

وبما أن $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$$0 < \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} < 0$$

ومنه حسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$.

مثال(10): أوجد نهاية الدالة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$.

<u>الحل:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{4x}{x}} = \frac{7}{4}$$

x

مثال(11): أوجد نهايات الدوال التالية:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$2)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=$$

-- ----

$$y=\frac{\pi}{2}-x\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-y\ ,x\to\frac{\pi}{2}\Rightarrow y\to 0$$

بوضع $\sin y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

مثال(12): أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1$$

مثال(13): أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3-53x}{4\sin x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-53x}{4\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\left(\frac{2}{4}x^2-\frac{53}{4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{53}{4}\right)=1\left(0-\frac{53}{4}\right)=\frac{53}{4}$$

أي أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{\sin x}=\frac{53}{4}$

مثال(14):أوجد النهايات التالية بالإعتماد على خواص النهايات والنهايات الشهيرة

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}$$

$$=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}=\frac{4}{\infty}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-(\cos 2x+1)}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin x\cos x-2cos^2x}{\sin x-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos x\,(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}2\cos x=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x=2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

4. قاعدة أوبيتال (لوبيتال)في حساب النهايات *Lopital Rule*

إذا كان لدينا $f, g: \mathrm{A} \to \mathrm{R}$ تابعان حقيقيان وكان $a \in R$, $a = \pm\infty$ أو أي قيمة أخرى وكان لدينا $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ فإن:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- يمكن استخدام القاعدة أكثر من مرة

مثال(15): أوجد نهاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

<u>الحل:</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

نستخدم قاعدة أوبيتال لإزالته:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال(16): أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$ عدم تعيين

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos(0)}{1}=1$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$

$=\frac{\sin 2\frac{\pi}{4}-\cos 2\frac{\pi}{4}-1}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-0-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos 2x-(-2\sin 2x)}{\cos x-(-\sin x)}=\frac{2\cos 2\frac{\pi}{4}+2\sin 2\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2(0)+2(1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{2}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

3) $\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

$= \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 16} \frac{\left(x^{\frac{1}{4}}-2\right)'}{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)'} = \lim_{x\to 16} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(x^{\frac{1}{4}-1}\right)}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}} = \lim_{x\to 16} \frac{\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}(16)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{4}(16)^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left((16)^{+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

4) $\lim_{x\to 2} \frac{(2-x)\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\cos\frac{\pi}{4}x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-1)\sin\left(\frac{\pi}{4}(2)\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4}x\right)(2-2)}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}x} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1}{-\frac{\pi}{4}(1)} = \frac{4}{\pi}$$

ملاحظات هامة:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 ax}{x^2}=a^2$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$ ؛ $\beta\neq 0$
- $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$

ملاحظة :

$e=2.71828\ldots$ أساس للوغاريتم الطبيعي (base of the natural logarithms)

$\pi=3.14159\ldots$ نسبة محيط الدائرة الى قطرها (ratio of the perimeter of the circle to the diameter)

أمثلة محلولة

هل يوجد نهاية للدوال التالية؟

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x^2-x-6}$

الحل:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}$$
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+2)}=-\frac{1}{5}$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)\neq\lim_{x\to 3^-} f(x)\Rightarrow$$ النهاية غير موجودة

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x^3|}{x}$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0$$
$$\lim_{x\to 0}-\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}-x^2=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\quad\Rightarrow$$ النهاية موجودة

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x}(x-3)}{|x-3|}$

الحل:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{3x}(x-3)}{(x-3)}=3$$
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{3x}(x-3)}{-(x-3)}=-3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)\neq\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

⇐ النهاية غير موجودة.

$$4)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & ,x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & ,\ x > 3 \end{cases}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \sqrt{x+13} = 4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = x^2 - 5 = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$$

النهاية موجودة $\Leftarrow$

$$5)\ f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ,\ x \le 3 \\ ax^2 - 1 & ,x > 3 \end{cases}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$$9a - 1 = 3a + 1 \Rightarrow 6a = +2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

النهاية موجودة عند $a = \frac{1}{3}$

$$6) \begin{cases} f(x) = x^2 + x + 1 & ، \ x \ge 1 \\ f(x) = 4x - 1 & ، \ x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + x + 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim ax - 1 = 3$$

النهايتين متساويتين وللتابع نهاية

تمارين غير محلولة

1. إذا كان
$$f(x)=\begin{cases} x+1; & x\in[0,1[\\ 0 ؛ & x=1 \\ 3-x; & x\in]1,2] \end{cases}$$
والمطلوب:

أوجد نهاية الدالة من اليمين واليسار وهل للدالة نهاية ؟

(أي أوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ إن وجدت)

2. ادرس نهاية الدوال التالية:

I. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x}{x+1}$

II. $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{2x+cosx}$

III. $\lim_{x\to 0} x^2 cos\frac{1}{x}$

IV. $\lim_{x\to 0}\frac{sin2x+tan3x}{5x}$

V. $\lim_{x\to \infty}\frac{1+x-x^3}{1+x^2+3x^3}$

VI. $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)sin4x}{5x}$

VII. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

3. ليكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x)= \quad |x|\ \frac{x-1}{x}$$

والمطلوب ادرس النهاية لهذه الدالة عندما $x\to 0$

===

في ٢٠٢٦/١/١٨