بيانيات حاسوبية

د. غيث ابراهيم بلال

المحاضرة الثامنة

التحويلات ذات الأبعاد الثنائية

تعتبر القدرة على التلاعب بالكائنات في الفراغ من الأمور الأساسية في أي نظام رسومات حاسوبي، ويسمى هذا التلاعب بالتحويلات transformation .

وتنبع الحاجة إلى هذه التحويلات عندما يلزم وضع العديد من الكائنات كل منها محدد بشكل مستقل وبدقة في نظام احداثيات خاص به.

وتوجد وجهتا نظر لوصف تحويل الكائن.

الأولى:

تعتمد على ان يحول الكائن بالنسبة إلى خلفية أو نظام إحداثيات ثابت وهو ما يوصف بالتحويلات الهندسية المطبقة على كل نقاط الكائن.

الثانية:

نثبت الكائن في حين يحول نظام الإحداثيات بالنسبة إلى الكائن وهذا ما يسمى بالتحويلات الإحداثية.

مثال: حركة سيارة وفق خلفية تصويرية.

حركة السيارة مع تثبيت الخلفية تعتبر تحويلات هندسية.

حركة الخلفية مع تثبيت السيارة تعتبر تحويلات احداثية.

التحويلات الهندسية Geometric transformation:

هي العمليات التي تطبق على التوصيف الهندسي للكائن لتغيير مكانه او حجمه او اتجاهه.

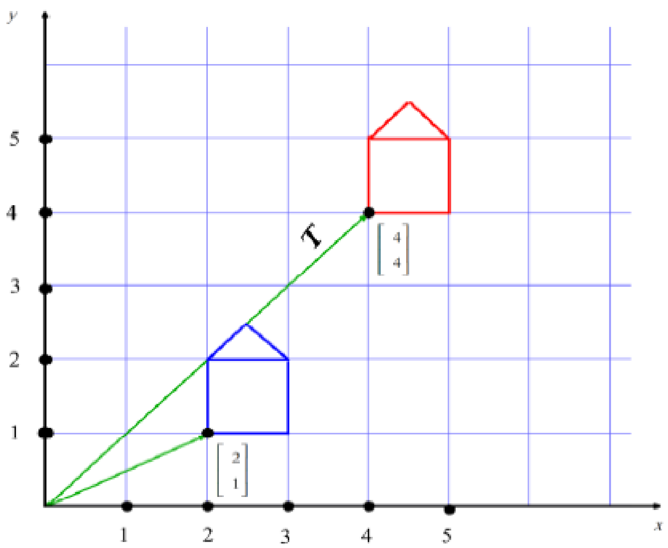
1. الإزاحة (الانتقال) Translation:

لإزاحة كائن من احداثياته الحالية P إلى احداثياته الجديدة P\` يكفي ان نجمع إلى الاحداثيات القديمة شعاع الانتقال (T) أو الازاحة أي:

$$p=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},p^{`}=\begin{bmatrix}x^{`}\\y\end{bmatrix},T=\begin{bmatrix}t_x\\t_y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{اذن}}\boxed{p^{`}=p+T}$$

وبالتالي:

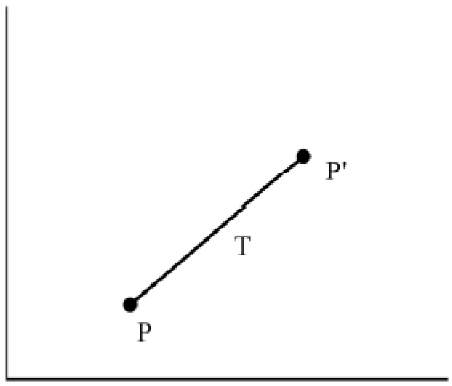
$$x^{`}=x+t_x \quad y^{`}=y+t_y \longrightarrow \boxed{p^{`}=T(p)}$$



$T(2,3)$

استنتاجات:

- يجب تطبيق العلاقة السابقة على جميع نقاط الجسم.
- ان تحويل الازاحة هو تحويل يحافظ على الاطوال والزوايا.
- الازاحة لا تسبب التشويه.
- إزاحة مستقيم تعني إزاحة نقطتي البداية والنهاية ثم إعادة رسم الخط بين موقعي النقطتين الجديدتين.



- إزاحة متعدد الاضلاع (المضلع) تعني إزاحة كل عقدة ثم إعادة توليد الكائن.
- إزاحة الدائرة تعني إزاحة المركز.

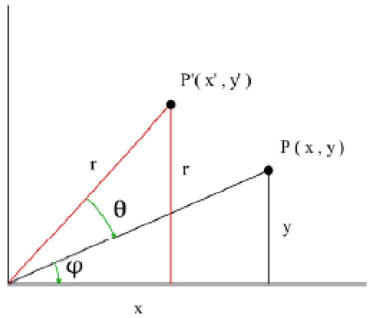
2. الدوران Rotation:

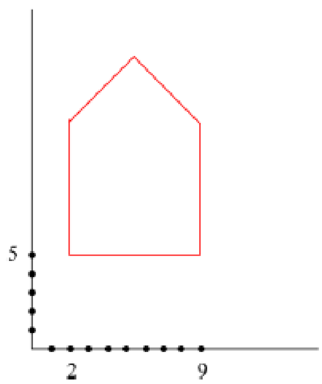
في الاحداثيات ثنائية الابعاد ندور دائماً حول المحور Z.

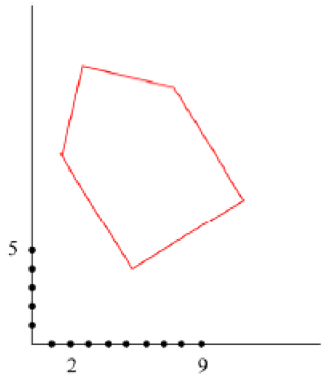
لتدوير جسم او كائن بزاوية معينة θ يجب علينا ان نستنتج علاقة الاحداثيات الجديدة له من خلال الاحداثيات القديمة عن طريق الشكل التالي:

من المثلث القائم الصغير ذو الزاوية φ نكتب:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$







الآن بعد الدوران $(\varphi + \theta)$ نجد ان:

$$x` = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\varphi.\cos\theta - r\sin\varphi.\sin\theta$$

$$y` = r\sin(\theta+\varphi) = r\cos\varphi.\sin\theta + r\sin\varphi.\cos\theta$$

$$x` = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y` = x\sin\theta + y\cos\theta$$

أي نكتب:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, p^{`} = \begin{bmatrix} x^{`} \\ y^{`} \end{bmatrix}, R\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{p^{`} = R\theta . p}$$

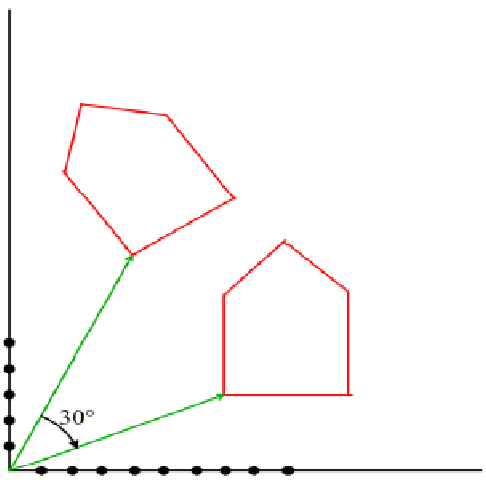
ملاحظة: تدوير الكائن او الشكل بزاوية حول نقطة الأصل حيث تعتبر موجبة إذا كان الدوران معاكساً لاتجاه عقارب الساعة وتعتبر سالبة إذا كان الدوران مع عقارب الساعة.

تدوير الكائن حول نقطة ليست نقطة الأصل أو مركز الاحداثيات بزاوية θ:

نستفيد من المعادلات السابقة وهي:

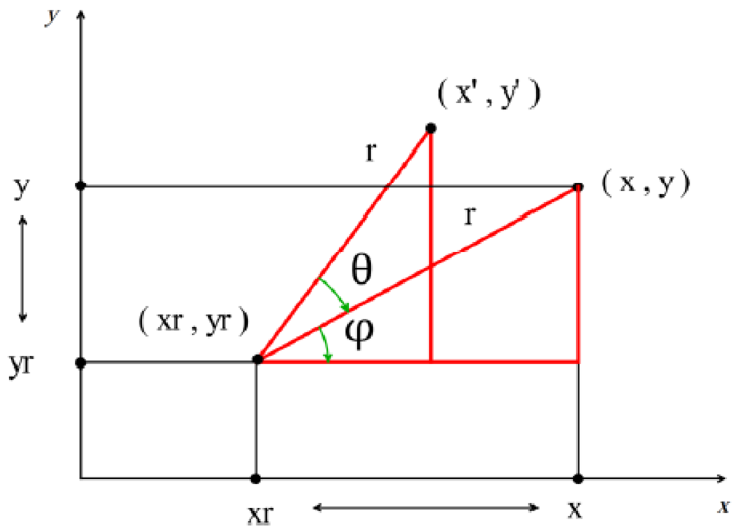
$$x^{`} = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y^{`} = x\sin\theta + y\cos\theta$$



$\theta = 30°$

نرسم الشكل:



لنحصل على معادلات دوران هذا الكائن حول نقطة ليست مركز الاحداثيات.

لنحصل على معادلات دوران هذا الكائن حول نقطة ليست مركز الاحداثيات.

$$x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\sin\theta$$
$$y' = y_r + (x - x_r)\sin\theta + (y - y_r)\cos\theta$$

ملاحظات:

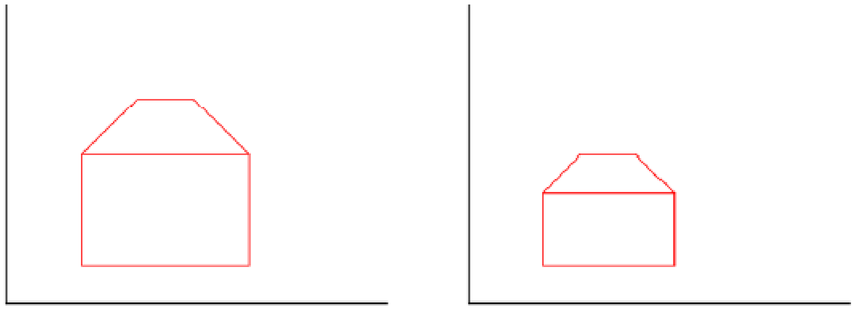
- التدوير لا يسبب التشويه.
- تدوير مستقيم يعني تدوير نقطتي البداية والنهاية ثم إعادة رسم الخط بين موقعي النقطتين الجديدتين.
- تدوير متعدد الأضلاع يعني تدوير كل عقدة ثم إعادة توليد الكائن.
- تدوير الدائرة يعني تدوير المركز على ان لا يكون مركز التدوير هو مركز الدائرة.

3. التقييس (او تغير الحجم) scaling:

لتغيير ابعاد الجسم يكفي ان نضرب مسقط نقطة على المحور ox بقيمة s_x بينما نضرب مسقط نقاطه على المحور oy بالقيمة s_y حيث نسمي S بعامل التقييس.

ونميز عدة حالات:

1. التقييس موحد الخط: تعني ان كل من s_x و s_y متساويا القيمة.
2. التقييس ذو الخط غير الموحد: أي ان s_x و s_y مختلفين.



أي نستطيع ان نعبر عن ذلك باستخدام المصفوفات.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \boxed{2}$$

مصفوفة التقييس

$$\left.\begin{aligned} p' &= s.p \\ x' &= s_x.x \\ y' &= s_y.y \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{1}$$

ملاحظات:

- معاملات التقييس قد تأخذ أي قيمة موجبة.
- ان تحويل scaling لا يحافظ على الأطوال ولا على الزوايا.
- إذا كانت $s_x, s_y > 1$ يزداد حجم الكائن.
- إذا كانت $s_x, s_y < 1$ ينقص حجم الكائن.
- إذا كانت $s_x, s_y = 1$ حجم الكائن لن يتغير.
- معاملات التقييس قد تأخذ أي قيمة سالبة وهنا لن يتغير حجمه فقط بل نحصل على انعكاس له بالنسبة لواحد او أكثر من المحاور الاحداثية.
- التقييس لا يغير الحجم فقط وانما يغير الموضع.
- تقييس متعدد الأضلاع يعني تقييس كل رؤوسه (عقده) ثم إعادة توليد الكائن.
- من اجل كائنات أخرى نطبق التقييس على المتحولات التي تشكل هذه الكائنات.
- من اجل تغيير حجم الدائرة نقيّس نصف القطر ثم نولد نقاط المحيط بالخوارزميات السابقة.

الإحداثيات المتجانسة Homogenous Coordinates:

نلاحظ من خلال من ما سبق ان عملية الازاحة تتطلب جمع مصفوفة مع احداثيات النقطة المطلوب ازاحتها بينما عمليتي الدوران والتقييس (تغير الحجم)

تتطلب ضرب مصفوفة مع احداثيات النقطة المطلوب تطبيق العملية عليها.

وبما انه من الأفضل توحيد ذلك إلى عملية الضرب (في حالة الازاحة) يتوجب علينا الانتقال إلى الاحداثيات المتجانسة للقيام بذلك.

في نظام الاحداثيات المتجانسة نضيف بعد ثالث إلى النقطة (x,y) هو h لتصبح النقطة (x,y,h) .

ونقول عن (x_1, y_1, h_1) و (x_2, y_2, h_2) انهما يمثلان نفس النقطة إذا وجد عدد $t \neq 0$ بحيث:

$$x_2 = t\,x_1 \qquad y_2 = t\,y_1 \qquad h_2 = t\,h_1$$

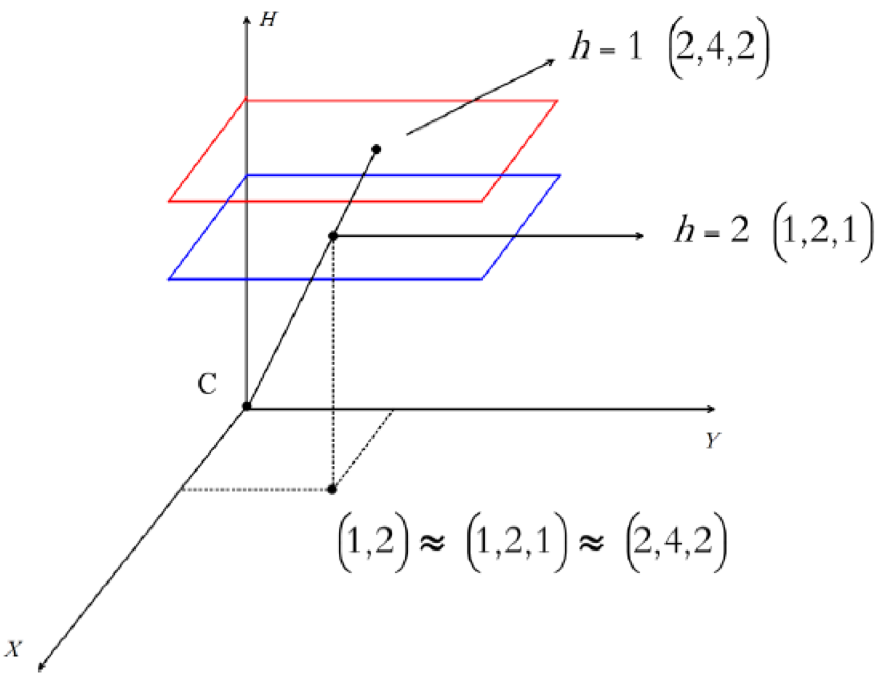
أي ان لكل نقطة عدة تمثيلات في نظام الاحداثيات المتجانسة وبالتالي يوجد تمثيل بحيث $h \neq 0$ وعندها نستطيع ان نقسم على h لنحصل على $\left(x/h\,, y/h\,, 1\right)$

ندعو كل من x/h و y/h بالإحداثيات الديكارتية للنقطة.

وهي العلاقة بين الاحداثيات المتجانسة في مستوي الاسقاط والاحداثيات الديكارتية لنفس النقطة.

ان جميع الاحداثيات التي تمثل النقطة والتي تكتب على الشكل $(tx\,, ty\,, th)$ تمثل مستقيماً في هذا الفراغ وعندما نحولها إلى $(x\,, y\,, 1)$ نكون قد أخذنا من المستقيم السابق النقطة الواقعة في المستوي الموازي ل xy والذي تبعد عنه بمقدار واحد.

وبالتالي وبما انه أصبح للنقطة ثلاث احداثيات نستطيع بسهولة التعبير عن مصفوفات التحويل كلها بالمصفوفة 3×3 وبالتالي يصبح شكل التمثيل المصفوفي للإزاحة والدوران والتقييس كما يلي(مع مراعاة ان جميع العمليات تصبح ضرب مصفوفات):



$$\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

الازاحة:

الازاحة تصبح ضرب مصفوفات.

$$T(d_x, d_y) \simeq T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

التقييس:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

الدوران:

$$R\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة مهمة:

يمكننا ببساطة ان نتوقع انه إذا طبقنا تحويل ما فلدينا مصفوفة مقابلة تعاكس عند تطبيقها هذا التحويل.

الانسحاب أو الازاحة وفق المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

يعاكس الانسحاب او الازاحة وفق المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

الدوران وفق المصفوفة $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

يعاكس الدوران وفق المصفوفة $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ملاحظة:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

التقييس او تغير الحجم وفق المصفوفة التالية

$$S_{s_x, s_y} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

يعاكس التقييس وفق المصفوفة

$$S^{-1}_{s_x, s_y} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$