جبر المجموعات:

تعريف: المجموعة هي كل جماعة من الأشياء التي تتصف بصفة معينة أو عدة صفات مشتركة

ونرمز عادة للمجموعات بالرمز A ، B

إذا كانت A مجموعة وفيها عنصر x يتصف بصفة عناصر A فإننا نقول إن $x \ni A$ أو $A \ni x$ إذا كان x لا يتصف بصفات عناصر A فإننا نقول أن x لا ينتمي للمجموعة A ونكتب $x \not\ni A$ أو $A \not\ni x$

لدينا عدة طرق لتمثيل المجموعة

1) إذا كان عدد عناصر المجموعة قليل فإنه بالإمكان تمثيل المجموعة بكتابة جميع عناصرها

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ قواسم العدد 12

2) يمكن التعبير عن المجموعة بالخاصية المميزة

$$A = \{x \in D , P(x)\}$$

حيث $P(x)$ إفادة تمثل صفة المميزة (أو الصفات) للعنصر x

مثال: بفرض $P(x)$ افادة تمثل « x عدد صحيح موجب ويقسم العدد 12»

ونعبر عن مجموعة العناصر التي تحقق هذه الخاصية بالشكل

$$D(12) = \{x \in Z^+ ; P(x)\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

3) يمكن أن نرمز للمجموعة بكتابة بعض العناصر ونضع نقاط تدل على بقية العناصر

$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$B = \{1, 3, 5, \ldots\}$

$R = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

علاقة الاحتواء والمجموعات الجزئية:

تعريف: ليكن لدينا المجموعتين A و B نقول عن المجموعة أنها محتواة في المجموعة B (أو نقول إن A مجموعة جزئية من B) إذا كان كل عنصر x من A هو عنصر من B

ونعبر عن ذلك بالعبارة $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$

ونكتب $A \subseteq B$ أو $B \supseteq A$

ونقول إن A غير محتواة في B إذا وجد عنصر واحد على الأقل من A لا ينتمي إلى B

وهذا يعني تحقق نفي العبارة $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ ونعلم أن

$$\neg(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv \exists x \in A , x \notin B$$

ونكتب أن $A \not\subseteq B$ أو $B \not\supseteq A$

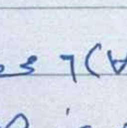
مثال: المجموعة الخالية Φ هي مجموعة محتواة في أي مجموعة A لأن العبارة الشمولية $\forall x \in \Phi \Rightarrow x \in A$ محققة

فلو قلنا إن العبارة الشمولية غير محققة فإن $\neg(\forall x \in \Phi \Rightarrow x \in A)$ محققة

وهذا يعني أن العبارة $\exists x \in \Phi , x \notin A$ محققة ولكن هذا الأمر غير صحيح

لأننا لا نستطيع ايجاد عنصر من Φ وبحيث أن هذا العنصر لا ينتمي إلى A.

اشكال فن: يمكن تمثيل المجموعة بدائرة أو منحني مغلق في داخله عناصر المجموعة



تعريف: المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز Φ

هي مجموعة لا تحتوي أي عنصر (أي أنه لا يوجد أي عنصر يحقق الخاصية المميزة $p(x)$)

مثال: $p(x)$ افادة تمثل « x طالبة في قسم الرياضيات عمرها أكثر من 70 عاماً»

مثال: $p(x)$ افادة تمثل « x عدد أولي زوجي أكبر من 2»

تعريف: نقول عن مجموعة إنها مجموعة كلية ونرمز لها بالرمز X ولها إذا كانت تحوي جميع العناصر التي تحقق الخاصية أو الخواص المميزة

مثال: إذا كنا ندرس مجموعة الاعداد الطبيعية فإن المجموعة الكلية هي N
أي أن $P(n)$ افادة تمثل « n عدد طبيعي »

مثال: إذا كنا ندرس مجموعة الاعداد الصحيحة فإن المجموعة الكلية هي Z

رتبة مجموعة: نعرف رتبة مجموعة A بأنها عدد عناصر المجموعة $o(A)$ أو $|A|$
ونقول عن A إنها مجموعة منتهية اذا كانت $o(A) = n$ و $n < \infty$ ونقول عن A إنها غير منتهية اذا كانت $o(A) = \infty$

مثال: $A = \{a, b, c, d\} \Leftarrow o(A) = 4$

مثال: N مجموعة غير منتهية لأن $o(N) = \infty$

تعريف: نقول عن مجموعتين A و B انهما متساويتين إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$
ونكتب $A = B$

ملاحظة: إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \neq B$ فاننا نعبر عن ذلك احياناً بالتعبير $A \subsetneq B$ أو $A \subset B$ ونقول إن A محتواة تماماً في B

مجموعة اجزاء أو (قوة مجموعة)

- لتكن X مجموعة ما. نرمز للمجموعة جميع المجموعات الجزئية في A بالرمز $P(X)$ وتسمى قوة المجموعة X $\quad P(X) = \{A ; A \subseteq X\}$

مثال: لنأخذ $X = \{a, b\}$ ولنوجد $P(X)$

$$P(X) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{X\}\}$$

ملاحظات:

1. Φ مجموعة جزئية من أي مجموعة وهي مجموعة جزئية تحوي صفر عنصر
2. المجموعة التي تحوي عنصر واحد تسمى مجموعة وحيدة العنصر ونكتب مثلاً $\{a\}$ ولانكتب a لأن $\{a\}$ تعني هي مجموعة جزئية وتحوي العنصر a
3. أي مجموعة محتواة في نفسها (أي أن كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها) $X \subseteq X$
$$\forall x \in X \Rightarrow x \in X$$

رتبة $P(X)$: لتكن X مجموعة تحوي n عنصر ولنوجد رتبة $P(X)$:

1. عدد المجموعات الجزئية في $P(X)$ والتي تحوي صفر عنصر يعطى بالقانون C_0^n , $C_0^n = 1$ وهي المجموعة Φ
2. عدد المجموعات في X والتي تحوي عنصر واحد فقط يعطى بالعلاقة C_1^n , $C_1^n = n$

3. عدد المجموعات الجزئية في X والتي تحوي عنصرين تعطى بالعلاقة C_2^n

4. عدد المجموعات الجزئية في X والتي تحوي n عنصر يعطى بالعلاقة C_n^n , $C_n^n = 1$

وهي المجموعة X نفسها

ويكون عدد عناصر $p(x)$ يعطى بالعلاقة

$$|P(x)| = \sum_{i=0}^{n} C_i^n = (1+1)^n = 2^n$$

مثال: لتكن $X = \{a,b\}$ ولنوجد $p(x)$ و $P(p(x))$

$$p(x) = [\Phi , \{a\} , \{b\} , X\} , |P(x)| = 2^2 = 4$$

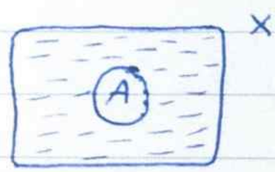
$$P(P(x)) = \{\Phi , \{\Phi\} , \{x_1\} , \{x_2\} , \{x_3\} , \{x_4\} , \{x_1,x_2\} , \{x_1,x_3\}$$
$$\{x_1,x_4\} , \{x_2,x_3\} , \{x_2,x_4\} , \{x_3,x_4\} , \{x_1,x_2,x_3\} , \{x_1,x_2,x_4\}$$
$$\{x_2,x_3,x_4\} , \{x_1,x_2,x_3,x_4\}]$$

$$p(p(x)) = [\Phi , [\Phi] , \{\{a\}\} , \{\{b\}\} , \{\{a,b\}\}]$$

عمليات على المجموعة $p(x)$

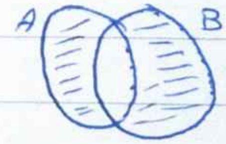
المتمم: لتكن $A \in p(x)$ نعرف مكملة المجموعة A بأنها مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$ أو A^c ونعبر عن ذلك بالمجموعة

$$\bar{A} = \{x \in X ; x \notin A\}$$



الاجتماع: لتكن لدينا المجموعتين A و B نعرف اجتماع A و B بأنه مجموعة جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B ونكتب

$A \cup B = \{x \in X ; x \in A$ أو $x \in B\}$

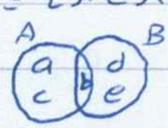


$A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,d,e\}$

$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$

التقاطع: ليكن لدينا المجموعتين A,B نعرف تقاطع المجموعتين بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B معاً ونكتب

$$A \cap B = \{x \in X , x \in A , x \in B\}$$



$A \cap B = \{b\}$

تعريف: تسمى البنية الجبرية كل مجموعة نعرف عليها عملية أو أكثر ولدينا هنا $(P(X), \subseteq, \cup, \cap, C, \Phi, X)$ تسمى بنية المجموعات أو جبر المجموعات الجزئية

خواص بنية جبر المجموعات

لتكن X مجموعة كلية و $P(X)$ مجموعة المجموعات الجزئية في X

1) $\bar{X} = \Phi \quad , \quad \bar{\Phi} = X$

2) $\bar{\bar{A}} = A$ تكملة التكملة $\quad \bar{\bar{A}} = \{x \in X , x \notin \bar{A}\} = x \in X ; x \in A$

3) خاصية اللانمو: $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

4) خاصية الإبدالية: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

5) خاصية التجميعية: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

6) خاصية التوزيعية: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7) خاصية الامتصاص: $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

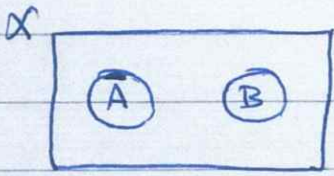
8) قانونا دي مورغان: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

9) $A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap X = A$

10) العناصر الماصة: $A \cap \Phi = \Phi \quad , \quad A \cup X = X$

11) المتمم: $A \cap \bar{A} = \Phi \qquad A \cup \bar{A} = X$



12) $A \subseteq B \equiv \bar{B} \subseteq \bar{A}$

13) $A \cap B = \Phi \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \ , \ B \subseteq \bar{A}$

14) $A \cup B = \Phi \Leftrightarrow A = \Phi \ , \ B = \Phi$

15) $A \cap B = X \Leftrightarrow A = X \ , \ B = X$

لنبرهن أن $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A\cup B$	$\overline{A\cup B}$	$\bar{A}\cap\bar{B}$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

لنبرهن أن $\overline{A\cup B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B}$

$\bar{A}\cap\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

$*)\ \forall x \in \overline{A\cup B} \Rightarrow x \notin A\cup B$

$\Rightarrow x\in A \ , x\notin B$

$\Rightarrow x\in\bar{A} \ , x\in\bar{B}$

وبالتالي $x\in\bar{A}\cap\bar{B}$

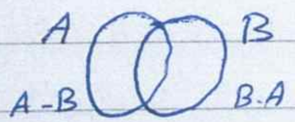
$*)\ \forall x\in\bar{A}\cap\bar{B} \Rightarrow x\in\bar{A} \ , x\in\bar{B}$

$\Rightarrow x\notin A \ , x\notin B$

$\Rightarrow x\notin A\cup B \Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$

فرق مجموعتين:

لتكن A و B مجموعتين نعرف A_B (A فرق B) بأنها مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B



$A\_B = \{x\in X \ ; x\in A \ , x\notin B\}$

يمكن البرهان على أن $A\_B = A\cap\bar{B}$

$\forall x\in A\_B \Rightarrow x\in A \ , x\notin B$

$\Rightarrow x\in A \ , x\in\bar{B} \quad \Rightarrow x\in A\cap\bar{B}$

$\Rightarrow A\_B \subseteq A\cap\bar{B} \quad \mathrm{I}$

$\forall x\in A\cap\bar{B} \Rightarrow x\in A \ , x\in\bar{B}$

$\Rightarrow x\in A \ , x\notin B \Rightarrow x\in A\_B$

$\Rightarrow A\cap\bar{B} \subseteq A\_B \quad \mathrm{II}$

الفرق التناظري:

لتكن A و B مجموعتين نعرف الفرق التناظري للمجموعتين A و B أنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A فقط أو إلى B فقط ونكتب

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$
$$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

$A = \{x \in N ;\ x > 5\} = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

$B = \{x \in N ;\ x \leq 9\} = \{0, 1, 2, \dots 9\}$

$A - B = \{10, 11, \dots\}$

$B - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$

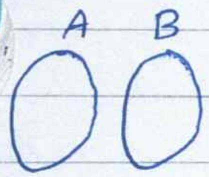
$A \Delta B = \{10, 11, \dots\} \cup \{0, 1, \dots, 5\} = N \setminus \{6, 7, 8, 9\}$

خواص الفرق والفرق التناظري

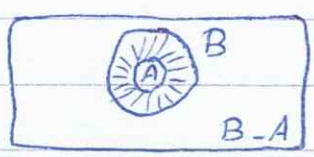
1) $A - A = \Phi$

2) $X - A = \bar{A}$

3) إذا كان $A \cap B = \Phi$ فإن $B - A = B \ , \ A - B = A$



4) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $A - B = \Phi$



5) الخاصية الابدالية: $A \Delta B = B \Delta A$

$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})$

$= (B \cap \bar{A}) \cup (\bar{B} \cap A) = B \Delta A$

A	B	ΔB
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

6) الخاصية التجميعية: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7) العنصر الحيادي: $A \Delta \Phi = A$

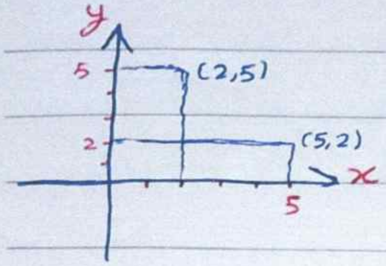
8) المعكوس: $A \Delta A = \Phi$

9) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

الجداء الديكارتي

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين نعرف الجداء الديكارتي ونرمز $A\times B$ بأنه

$$A\times B = \{(x,y) \; ; x\in A \; , y\in B\}$$



نسمي العنصر (x,y) ثنائية مرتبة ولدينا

1) $(x,y) \neq (y,x)$

2) $x=a \; , y=b \Leftrightarrow (x,y)=(a,b)$

مثال: لنأخذ $A=\{a,b,c,d\}$ و $B\{x,y,z\}$

$$A\times B = \{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z),(d,x),(d,y),(d,z)\}$$

$$B\times A = \{(x,a),(y,a),(z,a),(x,d),(y,d),(z,d),(x,c),(y,c),(z,c),(x,d),(y,d),(z,d)\}$$

ونلاحظ أن $|A\times B| = |B\times A| = |A|.|B|$ رتبة الجداء الديكارتي

* تعميم الجداء الديكارتي

يمكن أن نعمم الجداء الديكارتي على مجموعة منتهية أو غير منتهية من المجموعات

إذا كان لدينا المجموعات $A_1, A_2, \_\_\_ A_n$ فإن

$$A_1\times A_2\times \ldots \times A_n = \{(x_1,x_2\ldots x_n) \; ; x_1\in A_1 \; , x_2\in A_2 \ldots x_n\in A_n\}$$

$$= \{(x_1,x_2\ldots x_n) \; ; x_i\in A_i \quad \forall\, i=1,2,\ldots n\}$$

ويمكن كتابة الجداء الديكارتي $A_1\times A_2\ldots\times A_n$ بالشكل $\prod_{i=1}^{n} A_i$

ويمكن أن نأخذ جداء ديكارتي غير منتهٍ

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(x_1,x_2,\ldots x_i) \; ; x_i\in A_i \quad \forall i\in I\}$$

$I=\{1,2,3,\ldots n\}$ مجموعة أدلة $=((x_i) \; ; x_i\in A_i \; \forall i\in I)$

$J=\{1,2,3,\ldots m\}$ مجموعة أدلة

مثال $N\times 2Z\times R = \{(x,y,z) \; ; x\in N \; , y\in 2Z \; , z\in R\}$

$(3,4,\sqrt{2}) \in N\times 2Z\times R$

$(1,-2,2\sqrt{3}) \in N\times 2Z\times R$