جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم المعلوماتية

Information theory

نظرية المعلومات

مدرسة المقرر

د.بشرى علي معلا

مفردات المحاضرة

- المسافة الدنيا
- مسافة هامينغ
- القدرة على تصحيح الأخطاء
- ترميز Cyclic Redundancy Check (CRC)

المسافة الدنيا للترميز على شكل بلوكات

❖ إذا فرضنا أن لدينا كلمات الترميز :

$$C=(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$$
$$V=(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1})$$
$$X=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$$

❖ نعرف مايلي:

➢ **وزن هامنغ (الوزن البسيط) لكلمة ترميز(C)**: هو عدد الخانات غير الصفرية في هذه الكلمة. و يشار لها بـ w(C)

✓ مثال:

$$C=(1001011)\Rightarrow w(C)=4$$

المسافة الدنيا للترميز على شكل بلوكات

➢ **مسافة هامنغ (المسافة البسيطة) بين كلمتي ترميز(C,V)**: هي عدد أماكن الاختلاف بين هاتين الكلمتين. و يشار لها بـd(C,V)

✓ مثال:

$$\left.\begin{aligned}C&=(1001011)\\V&=(0100011)\end{aligned}\right\}\Rightarrow d(C,V)=3$$

➢ من أجل ثلاث كلمات ترميز يكون :

$$d(C,V)+d(V,X)\geq d(C,X)$$

➢ **مسافة هامنغ بين كلمتي ترميز (C,V):** يساوي وزن هامنغ لمجموع (C,V) باستخدام XOR

$$d(C,V)=w(C\oplus V)$$

✓**مثال:**

$$\left.\begin{array}{l}C=(1001011)\\V=(1110010)\end{array}\right\}\Rightarrow d(C,V)=4$$

$$w(C\oplus V)=w(0111001)=4$$

$$\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}\Rightarrow d(C,V)=w(C\oplus V)$$

➢ **المسافة الدنيا من أجل الترميز على شكل بلوكات :**

هي أصغر مسافة هامنغ يمكن حسابها بين أية كلمتي ترميز مختلفتين في ترميز ما :و يشار لها بـ $d_{\min}$

$$d_{\min}\underset{\Delta}{=}\min\{d(W,V)\ ;\ W,V\in C_b(n,k)\ ;\ W\neq V\}$$

$$d_{\min}=\min\ w_{\min}$$

▪ المسافة الدنيا للترميز الخطي على شكل بلوكات =الوزن الأصغري لكلمات الترميز غير الصفرية لهذا الترميز

➢ إذا كانت المسافة الدنيا في الترميز على شكل بلوكات هي $d_{\min}$ إن أي كلمتي ترميز مختلفتين من هذا الترميز تختلفان عن بعضهما بـ $d_{\min}$ موضع.

➢ **لا يمكن لأي شعاع خطأ مكون من $(d_{\min}-1)$ أو أقل أن يحول كلمة الترميز إلى كلمة ترميز أخرى. لذا**عندما سيكتشف المستقبل أن الشعاع المستقبل ليس كلمة ترميز من الترميز المستخدم ، عندها يقرر أن هناك خطأ قد حدث.

مثال

من أجل ترميز خطي على شكل بلوكات معطى كالآتي:

Codewords
0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1
1 1 1 0 0 1 0
0 1 0 0 0 1 1
0 1 1 0 1 0 0
1 1 0 0 1 0 1
1 0 0 0 1 1 0
0 0 1 0 1 1 1
1 1 0 1 0 0 0
0 1 1 1 0 0 1
0 0 1 1 0 1 0
1 0 0 1 0 1 1
1 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 0 1
0 1 0 1 1 1 0
1 1 1 1 1 1 1

ما هي المسافة الدنيا لهذا الترميز ؟

الحل:

حسب التعريف يكون :

$$d_{\min} \overset{\Delta}{=} \min\ w_{\min} = 3$$

المقدرة على تصحيح الأخطاء في الترميز الخطي على شكل بلوكات

- العدد الأعظمي للخانات القابلة للتصحيح هو:

$$t = \left(\frac{d_{\min} - 1}{2} \right)$$

✓ مثال

من أجل الترميز الخطي على شكل بلوكات فيه: $d_{\min} = 7$ يكون الترميز قادر

على كشف الأشعة الحاوية على $d_{\min} - 1 = 6$ خانة خطأ أو أقل و تصحيح $t = 3$ خانة

ترميزات هامنغ

(Hamming Codes)

- تعد ترميزات هامنغ من أول أصناف الترميز الخطي المصمم من أجل تصحيح الأخطاء . تستخدم هذه الترميزات من أجل التحكم بالأخطاء في أنظمة الاتصالات الرقمية و تخزين المعلومات .
- من أجل أي عدد صحيح موجب $m \geq 3$ ، يوجد ترميز هامنغ بالبارامترات الآتية:

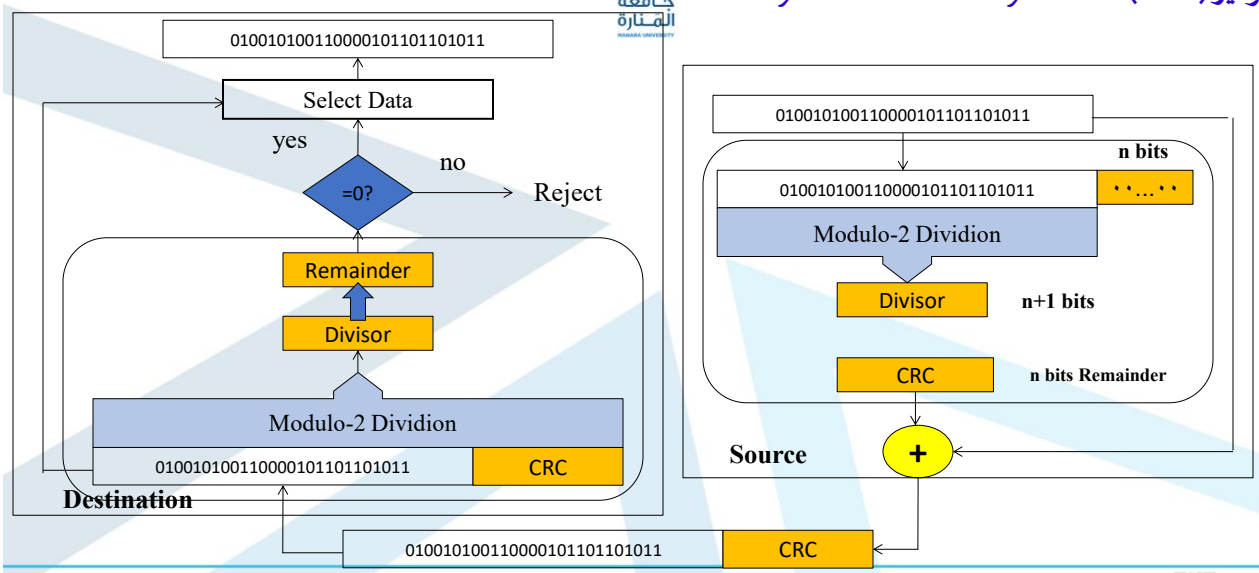
طول كلمة الترميز : $n = 2^m - 1$

عدد رموز المعلومات : $k = 2^m - m - 1$

عدد رموز فحص الانجابية: $n - k = m$

المقدرة على تصحيح الأخطاء: $t = 1(d_{\min} = 3)$

ترميز Cyclic Redundancy Check (CRC)

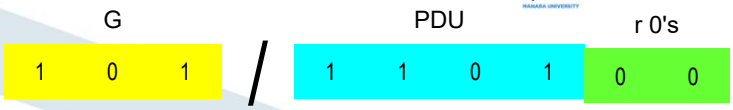


Cyclic Redundancy Check (CRC)

- إذا كانت PDU(Packet Data Unite) معروفة
- إذا كان المولد G معروف
- G : عملياً سلسلة من البتات ، إنه جزء من بروتوكول نقل المعطيات و يكون معلوماً في الإرسال و الاستقبال
- إذا كان G مكوناً من r+1 بت فتكون r=G-1
- نضيف r بت صفري إلى الـ PDU و نسميه PDU'
- نقسم PDU' على Gو هذا يعطي باقي قسمة *R*
- يكون لدينا الرسالة التي سترسل T :

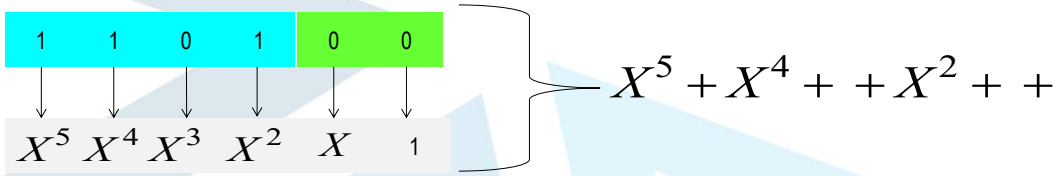
T = PDU' + R

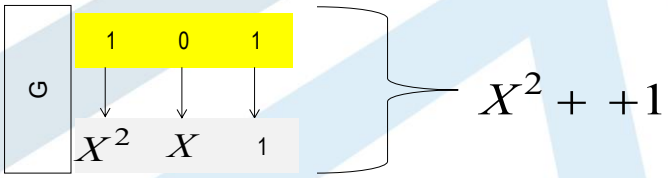
مثال Cyclic Redundancy Check (CRC)



r 0's=G-1=3-1=2

بعد هذا الحساب يتم التحويل إلى كثيرات الحدود لتسهيل القسمة، كما يلي:





مثال Cyclic Redundancy Check (CRC)

بعد التحويل إلى كثيرات الحدود، تتم القسمة:

$$X^2 + 1 \;\overline{)\; X^5 + X^4 + X^2 + \;\;}\;\; X^3 + X^2 + X$$

$$X^5 + \;\; + X^3$$

$$X^4 + X^3 + X^2 + \;\;$$

$$X^4 + \;\; + X^2$$

$$X^3 + \;\; + \;\;$$

$$X^3 + \;\; + X$$

$$X$$

Q = 1 1 1 0

R = 1 0

$\Rightarrow$ T = *PDU'+ R*

$$T = X^5 + X^4 + \;\; + X^2 + X + \;\;\Rightarrow \text{T} = 110110$$

مولد ترميز CRC

- الهدف من مولد الترميز أن يمتلك الخواص الأكثر أهمية :
  - اكتشاف كل الأخطاء الأحادية والثنائية
  - اكتشاف كل الأخطاء المفاجئة بطول 16 خانة أو أقل
- أمثلة عن عدة المولد:
  - CRC-8: 100000111
  - CRC-10: 11000110011
  - CRC-12: 1100000000101
  - CRC-16: 110000000000000101
  - CRC-CCITT (ITU-T): 10001000000100001
  - CRC-32: 10000010011000001000111010110111

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

نهاية المحاضرة