جامعة المنارة

كلية: الهندسة المعلوماتية

اسم المقرر: الرياضيات المتقطعة

رقم الجلسة (السابعة)

عنوان الجلسة

جبر المجموعات

تمرين 1:

حدد المجموعات الجزئية من مجموعات التعريف $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ التي تحددها العلاقات التالية:

a. $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 5\}$

b. $\{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 5\}$

c. $\{x \in \mathbf{Z}^+ \mid -2 < x < 5\}$

الحل:

a. $]-2,5[$

b. $\{-1,0,1,2,3,4\}$

c. $\{1,2,3,4\}$

تمرين2:

حدد عناصر كل مجموعة من المجموعات التي تحددها التعاريف التالية:

a. $S = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = (-1)^k, \text{ for some integer } k\}$.
b. $T = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 1 + (-1)^i, \text{ for some integer } i\}$.
c. $U = \{r \in \mathbf{Z} \mid 2 \le r \le -2\}$
d. $V = \{s \in \mathbf{Z} \mid s > 2 \text{ or } s < 3\}$
e. $W = \{t \in \mathbf{Z} \mid -1 < t < -3\}$
f. $X = \{u \in \mathbf{Z} \mid u \le 4 \text{ or } u \ge 1\}$

الحل:

a. S={1,-1}
b. T={2,0}
c. U={}= ∅
d. V=[3,∞[∪]- ∞ , 2] =Z
e. W={}=∅
f. X=]- ∞ , 4] ∪[1, ∞[=Z

تمرين3:اي من المجموعات التالية متساوية:

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, e, a, c\}$
$C = \{d, b, a, c\}$ $D = \{a, a, d, e, c, e\}$

الحل:

A=C
B=D

تمرين4:بفرض لدينا المجموعات التالية

$$A = \{c, d, f, g\}, B = \{f, j\}, \text{and } C = \{d, g\}$$

أي العبارات التالية صحيحة مع توضيح السبب:

$B \subseteq A?$ عبارة الاحتواء خاطئة لأنه $\exists j \in B$ ولكن $j \notin A$

$C \subseteq A?$ عبارة الاحتواء صحيحة لأن كل عنصر موجود في المجموعة **C** موجود في المجموعة **A**

تمرين5:أي من المجموعات التي تعرفها هذه العلاقات متساوية:

$$A = \{0, 1, 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 3\}$$
$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 3\}$$
$$D = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 < x < 3\}$$
$$E = \{x \in \mathbf{Z}^+ \mid -1 < x < 3\}$$

الحل:

لدينا ان المجموعة A=D

تمرين6:اي من العبارات التالية صحيحة:

a. $2 \in \{1, 2, 3\}$ b. $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$ c. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$

d. $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ e. $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$ f. $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$

الحل :

a. True	d. True
b. False	e. False
c. False	f. True

تمرين7:حدد عناصر المجموعات التي تعرفها العلاقات التالية:

a) $\{x \mid x \text{ is a real number such that } x^2 = 1\}$
b) $\{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 12\}$
c) $\{x \mid x \text{ is the square of an integer and } x < 100\}$
d) $\{x \mid x \text{ is an integer such that } x^2 = 2\}$

الحل:

a. $\{-1,1\}$
b. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11\}$
c. $\{0,1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$
d. $\emptyset$

تمرين8:

اجب بصح او خطأ عن العبارات التالية:

$0 \text{ in } \emptyset?$ خطأ لان المجموعة الخالية لا تحوي اي عنصر والصفر هو عنصر

$\emptyset \in \{\emptyset\}?$ صح لان المجموعة هنا ليست خالية بل تحوي عنصر هوالمجموعة الخالية

$\emptyset = \{\emptyset\}?$ خطأ انهما غير متساويتان لأن المجموعة الخالية لا تحتوي اي عنصر بداخلها ولكن المجموعة اليمنى تحوي عنصر هو المجموعة الخالية

$\emptyset \in \emptyset?$ خطأ لأن المجموعة الخالية لاتحوي اي عنصر فيها وبالتالي لا يوجد اي عنصر ينتمي اليها

تمرين 9:

بفرض لدينا المجموعات التالية:

$$A = \{c, d, f, g\}, B = \{f, j\}, \text{and } C = \{d, g\}.$$

حدد اي العبارات صحيحة مع التوضيح:

$C \subseteq C$? صحيحة لان كل مجموعة محتواة وتساوي نفسها

A∩C=C? صحيحة لان المجموعة A تحوي المجموعةC

A∩A=A? صحيحة لان كل مجموعة تتشارك مع نفسها بعناصرها كاملة

A∩B={} خاطئة لان هناك عناصر مشتركة بين المجموعتين وهي {f}

AUA=A صحيحة حسب خاصية اللانمو للاجتماع والتقاطع

A-A=A خطأ لان فرق مجموعة عن نفسها يساوي الخالية اي A-A=Ø

AUØ=A صحيحة لان اي مجموعة اذا اضفت اليها المجموعة الخالية ستعطي المجموعة نفسها

B∩Ø=B خاطئة لانه لا يوجد اي عنصر مشترك بين المجموعتين

B⊂{f,j,d} صحيحة لان كل عنصر في B موجود في المجموعة اليمنى

B∩C={c} خطأ لانه لايوجد اي عنصر مشترك بينهما وبالتالي تقاطعهما هو الخالية اي ان B∩C={}

{d}ϵA خطأ لأن الانتماء يكون لعنصر الى مجموعة والمجموعة A ينتمي اليهاالعنصر d وليس المجموعة {d}

{d}⊂A صحيحة لأن المجموعة الجزئية {D} محتواة في A

A∩Ā={}=Ø صحيحة لان كل مجموعة لا تشترك مع متممها بأي عنصر

A∩Ø=Ø صحيحة لانه لايوجد اي عناصر مشتركة بين المجموعتين حيث ان المجموعة الخالية هي عنصر ماص بالنسبة للتقاطع

$A \cup \emptyset = \emptyset$ خاطئة لان المجموعة الخالية حيادية للاجتماع وبالتالي اجتماع اي مجموعة مع الخالية هي المجموعة نفسها

$A \cup \bar{A} = X$ صحيحة لان اجتماع المجموعة A مع متممها يعطي المجموعة الشاملة

تمرين10:ماهو عدد عناصر المجموعات التالية :

a) $\{a\}$ **b)** $\{\{a\}\}$

c) $\{a, \{a\}\}$ **d)** $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

الحل:

a. 1
b. 1
c. 2
d. 3

كذلك اوجد عدد عناصر المجموعات التالية :

a) $\emptyset$ **b)** $\{\emptyset\}$

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ **d)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

الحل:

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

تمرين **11**: **ماهي قوة المجموعات التالية(اي المجموعات الجزئية التي يمكن تشكيلها من كل مجموعة)**

ملاحظة:المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من اي مجموعة لانها محتواه في اي مجموعة جبرية

a) $\{a\}$ **b)** $\{a, b\}$ **c)** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

الحل:

a. $P(\{a\})=\{\emptyset, \{a\}\}$

b. $P(\{a,b\})=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

c. $P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

لاحظ ان دائما عدد عناصر قوة اي مجموعة هو 2 مرفوعا بالقوة لعدد عناصرها الاساسي

مثلا في المثال التالي نجد ان عدد عناصر قوةكل مجموعة على الترتيب هي 8,16

$P(\{a, b, \{a, b\}\})$
$P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$

a. $2^3 = 8$
b. $2^4 = 16$

تمرين12:

بفرض لدينا المجموعات التالية

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 6, 9\}, C = \{2, 4, 6, 8\}.$

اوجد مايلي:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $A \cup C$ **d.** $A \cap C$
e. $A - B$ f. $B - A$ g. $B \cup C$ h. $B \cap C$

الحل:

a. {1,3,5,7,9,6}	e. {1,5,7}
b. {3,9}	f. {6}
c. {1,2,3,4,5,6,7,8,9}	g. {3,6,9,2,4,8}
d. Ø	h. {6}

تمرين13: بفرض لدينا المجموعات التالية:

$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$Y=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$

وبفرض المجموعة X هي المجموعة الشاملة اوجد متمم المجموعة A و Y

الحل:

إن متمم المجموعة A هي $\bar{A}=\{1,4,6,8,9,12,10,15,14,16,18,20\}$

ان متمم المجموعة Y هو $\bar{Y}=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$

أوجد متمم $A\cap Y$

الجواب:حسب قانون ديمورغان فان متمم التقاطع هو اجتماع المتممات

$\overline{A\cap Y}=\bar{A}\cup\bar{Y}=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\ ,19,20\}$

سؤال للتأمل: **هل كان يمكن حساب متمم $A\cap Y$ بأن نحسب $A\cap Y$ ثم نتمم المجموعة الناتجة للمجموعة الشاملة X ؟ الجواب : نعم**

لنتأكد :

$A\cap Y=\{2\}$ لنحسب الآن متمم هذه المجموعة الناتجة بالنسبة لX

اي سنوجد كل العناصر التي تنتمي للمجموعة الشاملة ولاتنتمي لـ$A\cap Y$

$X-(A\cap Y)=X-\{2\}=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\ ,19,20\}$

نجد ان الجواب نفسه الذي حصلنا عليه من ديمورغان

أوجد : $\overline{AUY}$

الجواب: حسب ديمورغان متمم الاجتماع هو تقاطع المتممات $\overline{AUY}=\bar{A}\cap\bar{Y}=\{1,9,15\}$

هل يمكن حساب متمم AUY بأن نحسب AUY ثم نتمم المجموعة الناتجة للمجموعة الشاملة X ؟

الجواب كالمثال السابق : نعم لنتأكد :

$AUY=\{2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20\}$

لنوجد متمم AUY بالنسبة لX اي سنحسب:

$X-(AUY)=\{1,9,15\}$

نجد ان الجواب هو نفسه الذي حصلنا عليه من قانون ديمورغان .

نتيجة هامة : لحساب متمم التقاطع نطبق قانون ديمورغان بان نجد اجتماع المتممات ولحساب متمم الاجتماع نحسب تقاطع المتممات

$$\overline{A\cap Y}=\bar{A}\cup\bar{Y} \qquad \overline{AUY}=\bar{A}\cap\bar{Y}$$

أوجد:

$A\Delta Y$ اذا علمت ان الفرق التناظري هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى Y مضافا اليها العناصر التي تنتمي الى Y ولا تنتمي الى A حيث يرمز Δ الى الفرق التناظري

$A\Delta Y=(A-Y)U(Y-B)=\{3,5,7,11,13,17,19\}U\{4,6,8,10,14,16,18,20\}$
$=\{2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20\}$

هل $A\Delta A=\{\}$? الجواب:نعم لأن:

$A\Delta A=(A-A)U(A-A)=\{\}U\{\}=\{\}$

ملاحظة:في المجموعات نلغي التكرار ولا يهمنا ترتيب العناصر