كلية الصيدلة	السنة الأولى
٢٠٢٥-٢٠٢٦	

الرياضيات

المحاضرة السادسة د. زياد اليوسف

استمرار التوابع (Functions Continuous)

1. استمرار التابع Function Continuous

تكون الدالة مستمرة إذا كان منحني هذه الدالة لا يعاني من أي انقطاع أي:

نقول أن الدالة f المعرفة على المجموعة A والتي تحوي النقطة a ؛ $a \in A$ أنها مستمرةً في النقطة a إذا كان:

1) $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Longleftrightarrow$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ملاحظة: نلاحظ من تعريف استمرار الدالة في نقطة، أنه لتكون الدالة مستمرةً عند a يجب أن تتحقق ثلاث شروط وهي:

1) أن يكون التابع f معرفاً عند a.

2) أن يكون للتابع f نهاية عند $x \to a$.

3) أن تكون هذه النهاية مساوية لقيمة التابع عند a.

مثال(1): ادرس استمرار الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 \quad , & x = 0 \end{cases} \text{ عند النقطة } a = 0$$

الحل:

نلاحظ أن $f(0) = 1$ لكن $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة اذا الدالة غيرة مستمرة عند النقطة a=0.

مثال(2): ادرس استمرار الدالة $f(x) = 2x + 5$ على R.

بما أن الخط البياني للدالة هو مستقيم وخالٍ من الانقطاع عند أي نقطة من مجموعة تعريفها فنهايته تساوي قيمته عند أي نقطة من مجموعة تعريفها R وبالتالي الدالة مستمرة على R.

مثال(3): ادرس استمرار الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2 \quad , & x = 1 \end{cases} \text{ عند النقطة } a = 1$$

الحل: لدينا $f(1) = 2$ فرضاً لكن

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3 \neq f(1)$$

⇐إذاً الدالة غير مستمرة عند $a = 1$.

ملاحظات

1) كل الدوال المثلثية $(\cos x\,, \sin x\,, tgx, \cot x\,, \ldots)$ مستمرة في مجالات تعريفها

2) الدوال الأسية واللوغاريتمية $(\ln x\,, \log x\,, e^{x}, \ldots)$ مستمرة في مجالات تعريفها

3) الدوال الجذرية $(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots)$ مستمرة في مجالات تعريفها

4) الدوال كثيرات الحدود $(f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n)$ مستمرة في R

مثال(4): ادرس استمرارية الدالة عند النقطة $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \;\; ; \; x \in [0,1[\\ \quad 0 \quad ; x = 1 \\ 3 - x \;\; ; \;\; x \in]1,2] \end{cases}$$

<u>الحل:</u>

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 3 - 1 = 2$$

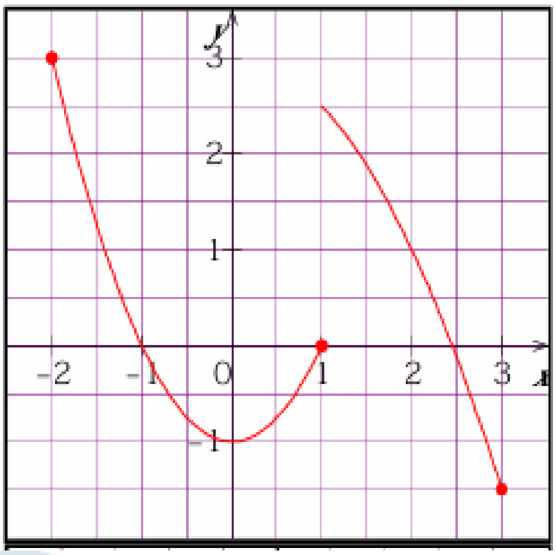
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

وقيمة الدالة في النقطة $x = 1$ هي $f(1) = 0$ وهي لاتساوي نهاية الدالة عند هذه النقطة

إذاً الدالة لها نفس النهاية من اليمين واليسار إلا أنها منقطعة عند النقطة $x = 1$

وبالتالي الدالة غير مستمرة .

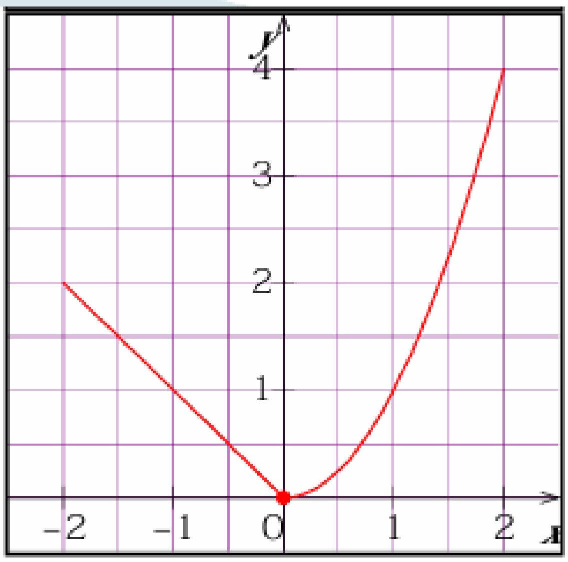
<u>التفسير البياني:</u> تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد)



<u>مثال1:</u>

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $]-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.



<u>مثال2:</u>

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{إذا كان } x \in]-2;0] \\ f(x) = x^2 & \text{إذا كان } x \in]0;2[\end{cases}$$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. أمثلة وتمارين محلولة

أمثلة:

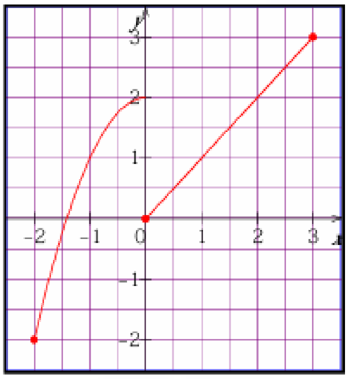
- الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

تمرين محلول1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & \text{إذا كان } x \in [-2;0[\\ f(x) = x & \text{إذا كان } x \in [0;3] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f . هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟
2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.
2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل:

الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto x^2 + x + 1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

3. تمارين غير محلولة

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x\ ; & x\in[-2;1[\\ f(x)=x-1\ ; & x\in[1;4[\end{cases}$$

1) مثل بيانيا الدالة f في معلم. هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على المجال $[-2;4[$؟ لماذا؟

3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

2 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1\ ; & x\le 2 \\ f(x)=x^2+x-5\ ; & x>2 \end{cases}$$

1) ادرس استمرارية الدالة f عند 2 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا؟

3 ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2\ ; & x\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+1\ ; & x>1 \end{cases}$$

4 f دالة عددية معرفة كما يلي:

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=3$

1) ادرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

5 لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب كما يلي:

$f(x)=2x^3-x+1$ و $g(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$

ادرس استمرارية f و g .

6 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=(x^2-x)\sin x$$

لماذا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

7 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$$

هل هي مستمرة على R ؟

في 25/1/2026