كلية الصيدلة	السنة الأولى
٢٠٢٥-٢٠٢٦	

الرياضيات

المحاضرة السابعة   د. زياد اليوسف

القيم العظمى والصغرى (Maximum and Minimum Values)

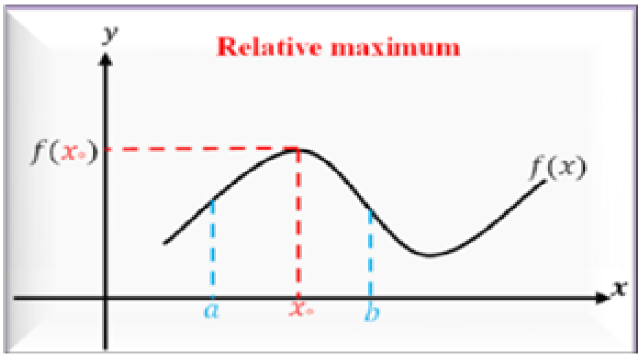
القيم العظمى والصغرى Maximum and minimum values

تعريف:

يقال أن للدالة f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) relative (local) maximum value عند $x = x_0$ ، أذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

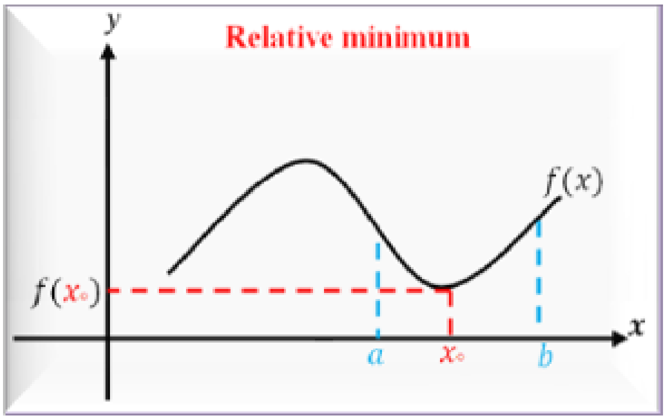
وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة العظمى النسبية للدالة.

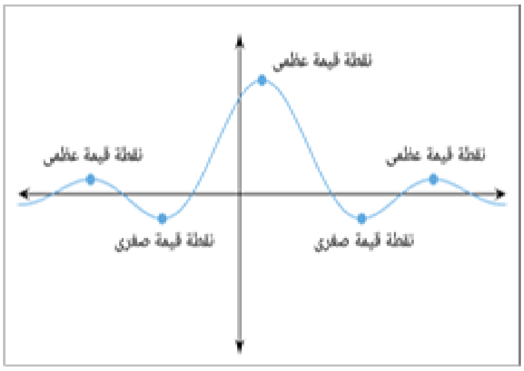


كما يقال أن للدالة f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) relative (local) minimum value عند $x = x_0$ ، أذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية للدالة.





ملاحظة-1: تسمى القيم العظمى النسبية والقيم الصغرى النسبية قيم قصوى نسبية للدالة وتسمى نقاط القيم العظمى والصغرى النسبية بالنقاط القصوى النسبية للدالة.

ملاحظة-2: كل نقطة قصوى نسبية هي نقطة حرجة للدالة والعكس غير صحيح دائماً.

ملاحظة-3: يمكن تصنيف النقاط الحرجة الى نقاط قيم عظمى نسبية، أو نقاط قيم صغرى نسبية، أو نقاط انقلاب.

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الأولى

أ- نجد المشتقة الأولى $f'(x)$ ، ومنها نحصل على الاعداد الحرجة للدالة.

ب- ندرس أشارة المشتقة الأولى عن يمين ويسار الأعداد الحرجة c ويكون لدينا الحالات الاتية:

- أذا تغيرت أشارة المشتقة من السالب الى الموجب حول العدد الحرج c فأنه يوجد قيمة صغرى نسبية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية هي $(c, f(c))$.
- أذا تغيرت أشارة المشتقة من الموجب الى السالب حول العدد الحرج c فأنه يوجد قيمة عظمى نسبية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة العظمى النسبية هي $(c, f(c))$.
- أذا لم تتغير أشارة المشتقة حول النقطة الحرجة c فأن $f(c)$ ليست قيمة قصوى نسبية للدالة f .

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية

يمكننا في كثير من الأحيان أستعمال المشتقة الثانية للدالة لأجل أختبار وجود القيم القصوى النسبية ومعرفة نوعها. وطريقة الأختبار بالمشتقة الثانية كالاتي:

ليكن c عدد حرج للدالة f وأن $f''(c)$ موجودة عندئذ

1) أذا كانت $f''(c) > 0$ ، فان للدالة قيمة صغرى نسبية عند c .

2) أذا كانت $f''(c) < 0$ ، فان للدالة قيمة عظمى نسبية عند c .

مثال: جد نقاط القيم القصوى النسبية، وحدد نوعها، للدالة:

1

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

الحل: بتطبيق الخطوات (أستعمال المشتقة الاولى)

$$f'(x) = 2x - 4$$

$2x - 4 = 0 \Longrightarrow 2x = 4 \Longrightarrow x = 2$ العدد الحرج

نختار العدد 2.1 عن يمين العدد الحرج والعدد 1.9 عن يساره ونختبر أشارة المشتقة

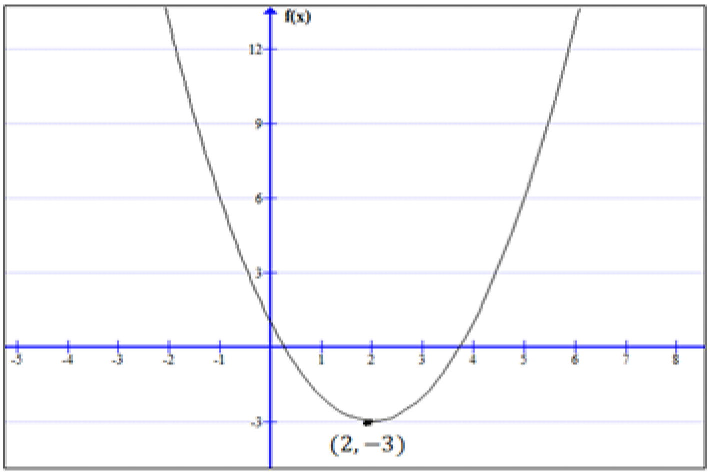
$$f'(1.9) = 2(1.9) - 4 = -0.2 < 0$$
$$f'(2.1) = 2(2.1) - 4 = 0.2 > 0$$

بما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x = 2$ ، فأن للدالة قيمة صغرى نسبية عندما $x = 2$. ولما كان

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

فأن القيمة الصغرى النسبية للدالة هي -3 وتكون في النقطة $(2, -3)$.

لاحظ أن $f(2) = -3$ هي في الحقيقة قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2, \infty)$. وعليه، فأن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي $(2, -3)$.



مثال 2: جد نقاط القيم العظمى والصغرى النسبية وأدرس تزايد وتناقص الدالة $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة في $\mathbb{R}$. أي أن منطلق الدالة هو جميع الاعداد الحقيقية.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$\Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$ الأعداد الحرجة

والان نعين أشارة المشتقة $f'(x)$ ، لاحظ أن أشارة المشتقة تتحدد من إشارة البسط لأن أشارة المقام موجبة لكل $x \in \mathbb{R}$.

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
أشارة $f'(x)$	سالبة	موجبة	سالبة

بما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x = -1$ ، فأن للدالة قيمة صغرى نسبية عندما $x = -1$. وبما أن

$$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = \frac{-1}{2}$$

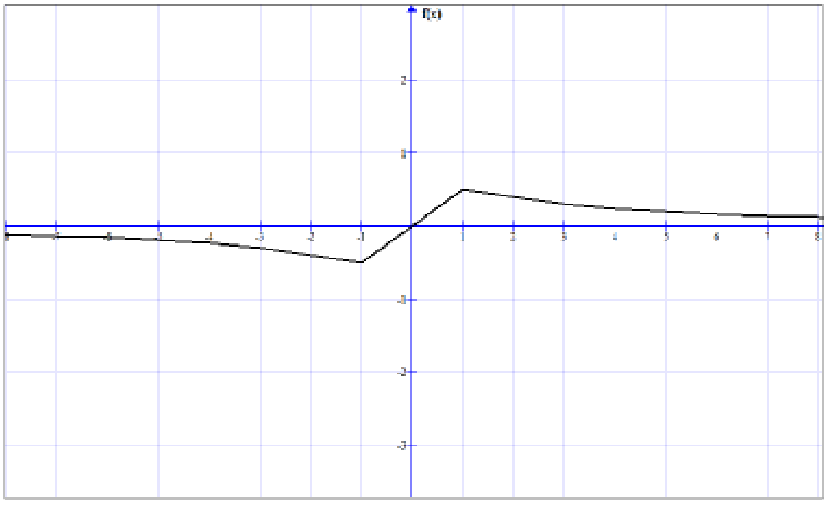
فأن القيمة الصغرى النسبية للدالة هي $\frac{-1}{2}$ وتكون في النقطة $(-1, \frac{-1}{2})$.

وبما أن أشارة المشتقة تتغير من الموجب الى السالب حول العدد الحرج $x = 1$ ، فأن للدالة قيمة عظمى نسبية عندما $x = 1$. وبما أن

$$f(1) = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{2}$$

فأن القيمة العظمى النسبية للدالة هي $\frac{1}{2}$ وتكون في النقطة $(1, \frac{1}{2})$.

نلاحظ من الجدول أن $f'(x)$ سالبة في الفترتين $(1, \infty)$ ، $(-\infty, -1)$ ، وموجبة في الفترة $(-1, 1)$. وعليه، فأن الدالة متناقصة على الفترتين $(1, \infty)$ ، $(-\infty, -1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1, 1)$.



مثال 3: جد نقاط القيم القصوى النسبية، وبين نوعها، للدالة $f(x) = x^3 - x$

الحل: منطلق الدالة هو $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$ أعداد حرجة

بأستعمال المشتقة الثانية:

$$f''(x) = 6x$$

عندما $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، تكون

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

لذلك، للدالة قيمة صغرى نسبية عند $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

وعندما $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، تكون

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 6\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$$

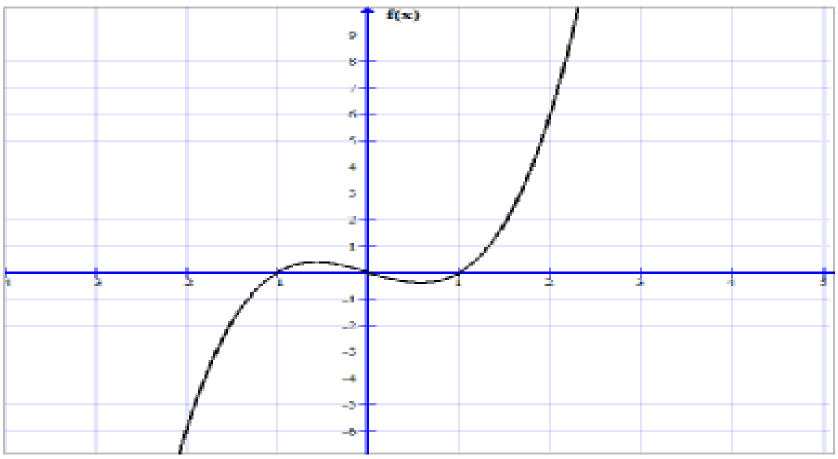
لذلك، للدالة قيمة عظمى نسبية عند $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

ولأيجاد أحداثيات نقاط القيم القصوى النسبية، نجد قيمة الدالة العظمى والصغرى النسبية وذلك بالتعويض في الدالة المعطاة:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

وعندئذ تكون أحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$ وأحداثيات نقطة القيمة العظمى النسبية هي $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.



مثال: جد نقاط القيم القصوى النسبية وبين نوعها $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$
4

الحل:

$$f'(x)=x^2-x-2$$
$$x^2-x-2=0 \Longrightarrow (x-2)\cdot(x+1)=0 \Longrightarrow x=2\,,x=-1$$
$$f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-\frac{1}{2}(2)^2-2\,(2)+2=\frac{-4}{3}$$

$$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2-2\,(-1)+2=\frac{19}{6}$$
$$f''(x)=2x-1$$

عندما $x=2$ ، فأن

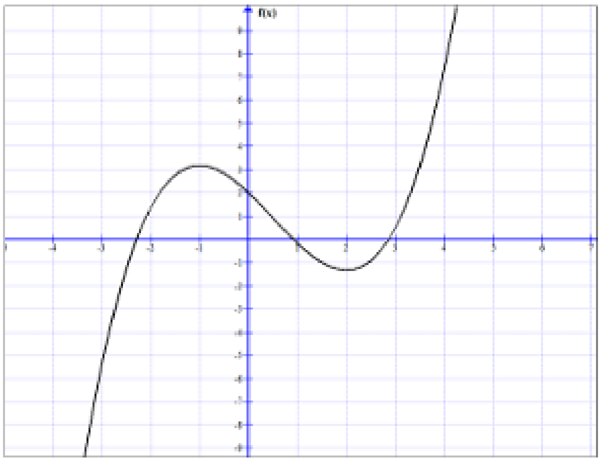
$$f''(2)=2(2)-1=4-1=3>0$$

وعليه، فأن للدالة قيمة صغرى نسبية عند $x=2$ ، وأحداثياتها هي $\left(2,\frac{-4}{3}\right)$

عندما $x=-1$ ، فأن

$$f''(-1)=2(-1)-1=-2-1=-3<0$$

وعليه، فأن للدالة قيمة عظمى نسبية عند $x=-1$ ، وأحداثياتها هي $\left(-1,\frac{19}{6}\right)$.



مثال: جد جميع النقاط الحرجة، وبين نوعها، وجد فترات التزايد والتناقص للدالة
$$f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

المشتقة غير معرفة عندما $x = 0$. وفي حالة

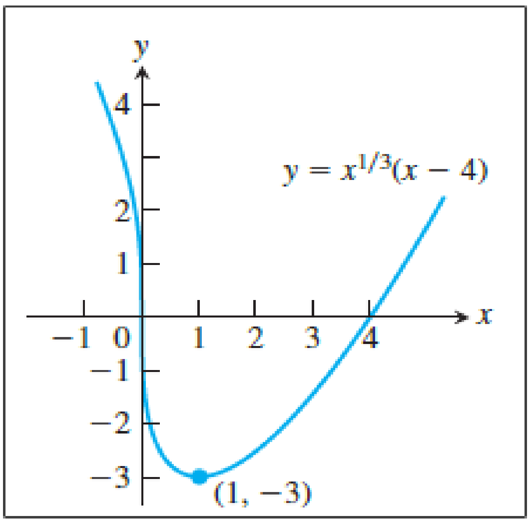
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} = 0 \Longrightarrow 4(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

وبذلك يكون لدينا عددان حرجان هما: $x = 0$ و $x = 1$.

بالنسبة لفترات التزايد والتناقص لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0,1)$ ، $(1,\infty)$.

Interval	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Sign of f'	$-$	$-$	$+$
Behavior of f	decreasing	decreasing	increasing

وبذلك فأن الدالة متناقصة على الفترتين $(-\infty, 0)$ ، $(0,1)$ ومتزايدة على الفترة $(1,\infty)$.



بالنسبة للقيم القصوى النسبية للدالة: بما أن أشارة المشتقة لم تتغير عند $x = 0$ ، فليس للدالة قيمة عظمى او صغرى هناك. وبما أن أشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب عند $x = 1$ ، فأن للدالة قيمة صغرى نسبية وهي

$$f(1) = f(x) = 1^{4/3} - 4(1)^{1/3} = 1 - 4 = -3$$

وهي ايضاً قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$ ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$. وعليه، فأن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي: $(1, -3)$.

الواجب: جد فترات تزايد وفترات تناقص ونقاط القيم القصوى النسبية للدوال (أن وجدت)

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$$
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
$$f(x) = x^2 - 4$$
$$f(x) = x - x^3$$
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$$
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

===

في 1/2/2026