المحاضرة الثانية : توان الجسيم

د.نزار عبد الرحمن

تعريف الجسيم : عبارة عن جسم أبعاده وكتلته صغيرة جدا بحيث يمكن إهمالها

الشرط اللازم والكافي لتوازن الجسيم هو أن يكون المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسيم مساويا الصفر.

*مراحل حل المسائل المتعلقة بتوازن الجسيم :

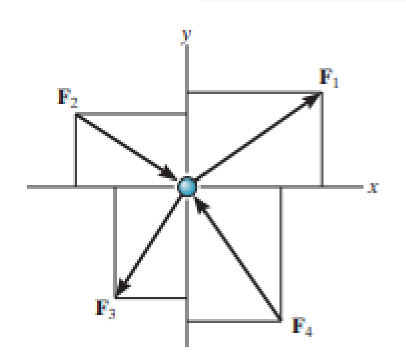
1.تحديد الجسيم

2. رسم مخطط الجسم الحر للجسيم : أي أننا نتخيّل الجسيم حراً في الفراغ محررا من كافة قيوده ونستبدل عن هذه القيود بالقوى المناسبة .

تعريف القيد : هو كل ما يمنع حركة الجسم في الفراغ (نابض ،حبل ، كبل ، نقاط وسطوح استناد .....).

3- كتابة معادلتين للتوازن :

نحل المعادلتين ونحسب المجاهيل ، وإذا نتج بعد الحساب أن إشارة إحدى القوى سالبة فهذا يعني أن الاتجاه الصحيح لهذه القوة هو عكس الاتجاه المفروض .



$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$

$$\sum F_x . \boldsymbol{i} + \sum F_Y . \boldsymbol{J} = 0$$

من هذه المعادلة الشعاعية ينتج شرطين لتوازن الجسيم : مركبات القوة وفق المحورين x ويجب أن تكون مساوية للصفر:

$$\sum F_x = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 \qquad (2)$$

بعض التطبيقات على توازن الجسيم :

1- النوابض : نحسب القوة المؤثرة في النابض عن طريق العلاقة: $F = K.S$

حيث :K ثابت استطالة النابض

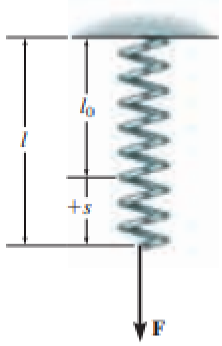
$$S = l - l_0$$

S - مقدار الاستطالة

= الطول النهائي – الطول الأصلي

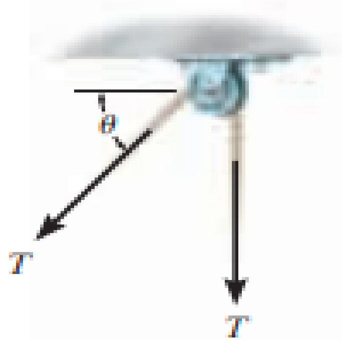
l – الطول النهائي

l_0 – الطول الأصلي

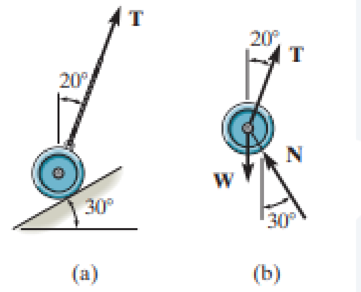


(a)

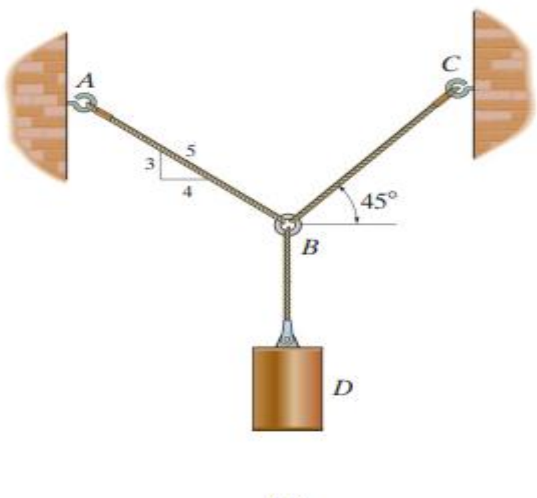
2- الكابلات والحبال والبكرات: تستخدم الكابلات والحبال لنقل تأثير القوى والحمولات على طرفي البكرة ، ونعتبر أن الكبل أو الحبل يكون متوازنا على طرفي البكرة ، وفي أي مقطع من مقاطعه



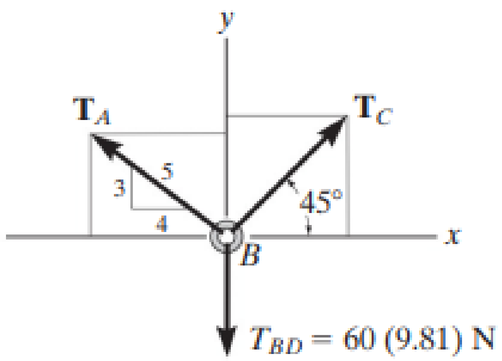
Cable is in tension
(b)

	3- نقاط الاستناد الملساء : عند الاستناد على سطح أملس ، عندها يكون رد فعل السطح عبارة عن قوة متعامدة مع سطح الاستناد عند نقطة الاستناد.

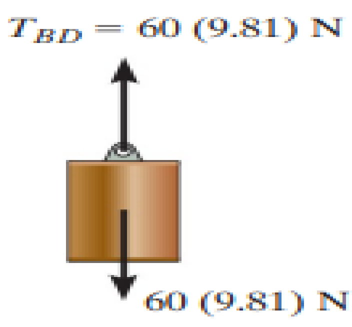
مسألة1: أوجد القوة المؤثرة في الكبلين AB,BC من أجل تعليق اسطوانة كتلتها 60Kg كغ



(a)



(c)



(b)

$$\sum F_x = 0\ , T_{BC}.\cos 45 - T_{AB}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0\ , T_{BC}.\sin 45 + T_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad (2)$$

من المعادلة (1) نكتب :

$$T_{AB} = 0.883T_{BC}$$

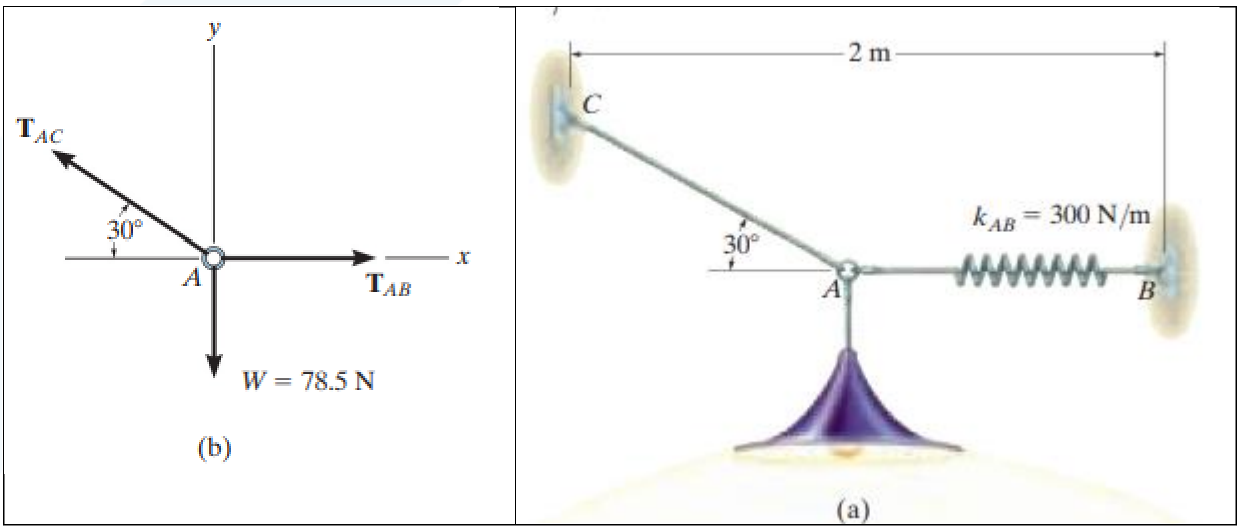
نعوض في المعادلة (2) :

$$T_{BC}.\sin 45 + \left(\frac{3}{5}\right)(0.833T_{BC}) - 60(9.81) = 0$$

ينتج $T_{AB} = 420\ \text{N}$ ،$T_{BC} = 476\text{N}$

مسألة (2) : أوجد الطول اللازم للحبل AC،من أجل تعليق مصباح كتلته $8Kg$ في وضعية التوازن. الطول الأصلي للنابض $L'_{AB} = 0.4m$،ثابت صلابة النابض

$$k_{AB} = 300N/m$$



الحل : إذا علمنا قيمة القوة المؤثرة في النابض ، نستطيع حساب استطالة النابض عن طريق المعادلة : *F= K.S*، عنها نستطيع حساب طول الحبل من الشكل الهندسي .

مخطط الجسم الحر:مخطط الجسم الحر للجسيم *A* مبيّن في الشكل(*b*)

وزن المصباح : *W=8(9.81)=78.5 N*

كتابة معادلات التوازن :

$$\sum F_x = 0 , T_{AB} - T_{AC}.\cos 30 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 , T_{AC}.\sin 30 - 78.5 = 0 \quad (2)$$

بحلّ المعادلتين ينتج :

$$T_{AC} = 157N, T_{AB} = 136N$$

استطالة النابض AB : $T_{AB} = K_{AB}.S_{AB}$

الطول النهائي للنابض :

$$L_{AB} = L'_{AB} + S_{AB}$$

$$L_{AB} = 0.4m + 0.453m = 0.853m$$

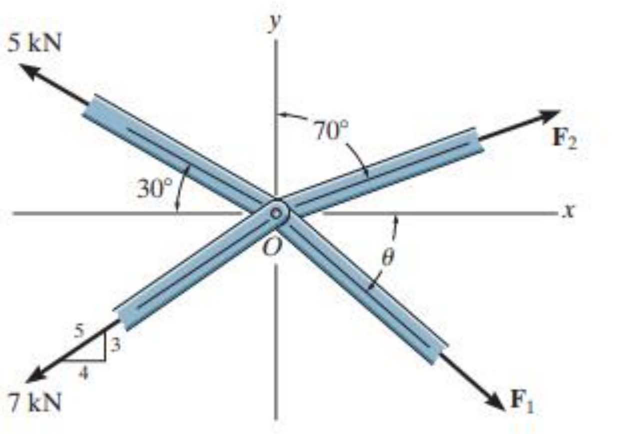
المسافة الكلية من *C* إلى *B*:

$$2m = l_{AC}.cos30 + \quad 0.853m$$

يكون الطول المطلوب للحبل AC:

$$l_{AC} = 1.32m$$

مسألة 3:عناصر من جائز شبكي , متمفصلة عند النقطة O. أوجد مقدار القوة F1 والزاوية θ من أجل التوازن . F2=6KN.



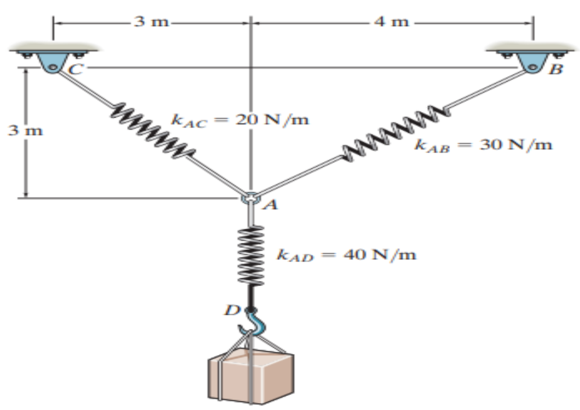
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 cos\theta + F_2 \sin 70 - 5\, cos30 - 7(\tfrac{4}{5}) = 0 \quad (1)$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow F_1 sin\theta + F_2 \cos 70 + 5\, sin30 - 7(\tfrac{3}{5}) = 0 \quad (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على (1):

$$\theta = 4.69\ .\ F1 = 4.31KN$$

مسألة4 : احسب مقدار الاستطالة لكل نابض من أجل تعليق صندوق كتلته 2Kg في وضعية التوازن .



$$F_{AD} = 2(9.81) = x_{AD}(40) \Rightarrow x_{AD} = 0.4905\text{m}$$

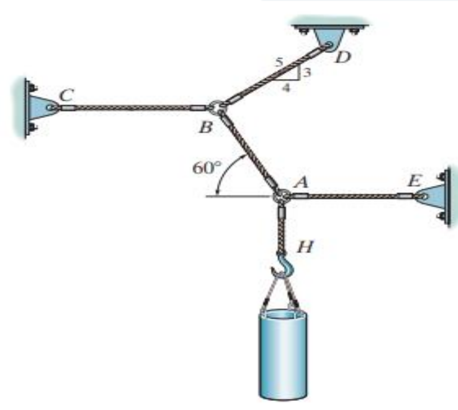
$$\sum Fx = 0 \Rightarrow F_{AB}(\frac{4}{5}) - F_{AC}(\frac{1}{\sqrt{2}})=0 \qquad (1)$$

$$\sum FY = 0 \Rightarrow F_{AB}(\frac{3}{5})+F_{AC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2(9.81) = 0 \qquad (2)$$

F_{AC} =15.86KN, $x_{AD}=\frac{15.86}{20}$ =0.793m

F_{AB} = 14.01N, $x_{AB} = \frac{14.01}{30}$ =0.467 m

- مسألة 5:اسطوانة كتلتها 30 Kg. احسب القوة المؤثرة في كل حبل من أجل التوازن



العقدة A:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AE} - T_{AB}\cos 60 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB}\sin 60 - 30(9.81) = 0 \ (2)$$

العقدة B:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -T_{BC} + T_{AB}.cos60 + T_{BD}(\frac{4}{5}) = 0 \ (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -T_{AB}.\sin 60 - T_{BD}(\frac{4}{5}) = 0 \qquad (4)$$

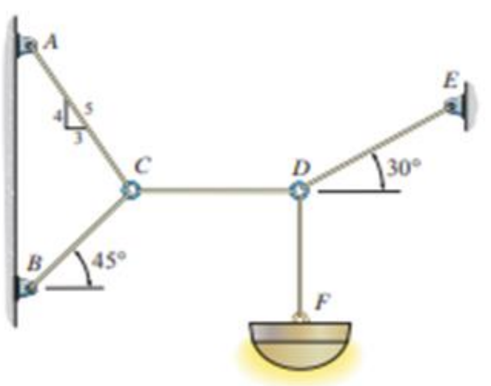
T_{HA}=30(9.81) = 294 N

$T_{AE} = 170N$

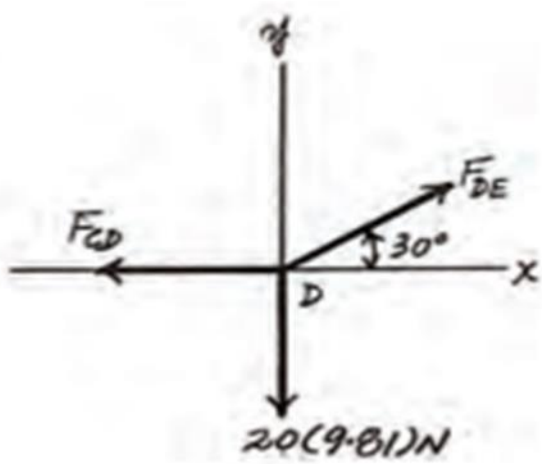
$T_{AB} = 340$ N

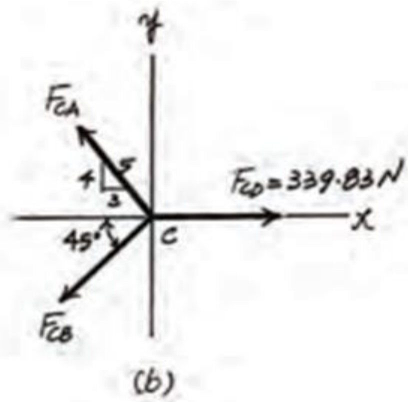
$$T_{BD} = 490\text{N}$$
$$T_{BC} = 562\text{N}$$

مسألة 6 : احسب القوة المؤثرة في كل حبل من أجل تعليق مصباح كتلته Kg20 **في وضعية التوازن .**



نبدأ الحل عند الجسيم D ونرسم مخطط الجسم الحر للجسيم ونكتب معادلات التوازن:





$$\sum \text{F}_x = 0 \Rightarrow -\text{F}_{\text{CD}} + \text{F}_{DE}\cos 30 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \text{F}_{\text{DE}}\sin 60 - 30(9.81) = 0 \ (2)$$

$$\text{F}_{\text{DE}} = 392\text{N}\,, \text{F}_{\text{CD}} = 339.8\text{N}$$

نستخدم النتائج وننتقل إلى دراسة العقدة C:

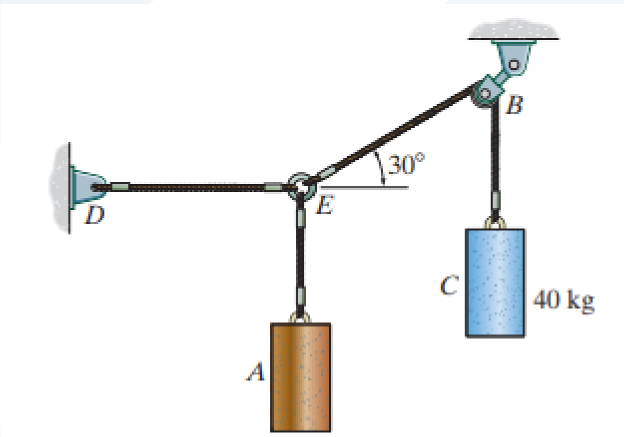
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 339.8 - F_{CD}.\cos45 + F_{CA}(\frac{3}{5}) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CA}(\frac{4}{5}) - F_{CB}\sin45 = 0 \ (2)$$

عن طريق حل المعادلتين (1) و(2) ينتج :

FBC= 275 N , FAC=243N

مسألة 9: إذا كانت الكتلة الاسطوانة 40Kg C، احسب كتلة الاسطوانة A لتعليق المجموعة في وضعية التوازن.

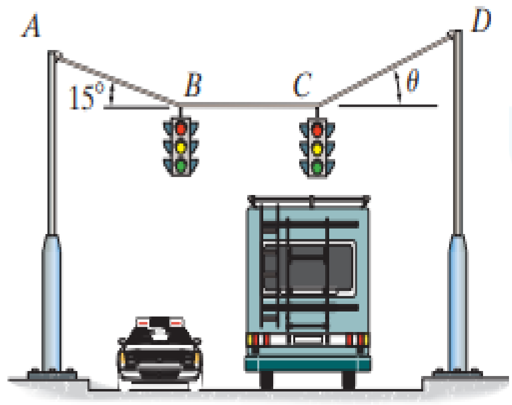


$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \quad (392.4\ \text{N})\sin 30^\circ - m_A(9.81) = 0$$

$$m_A = 20\ \text{kg} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة10 : احسب قوى الشد في الكبلات AB و BCو CD، اللازمة لتعليق اشارات المرور ذات الكتل 10kgو 15 kg عند النقطتين Bو Cعلى التوالي . واحسب قيمة الزاوية θ.

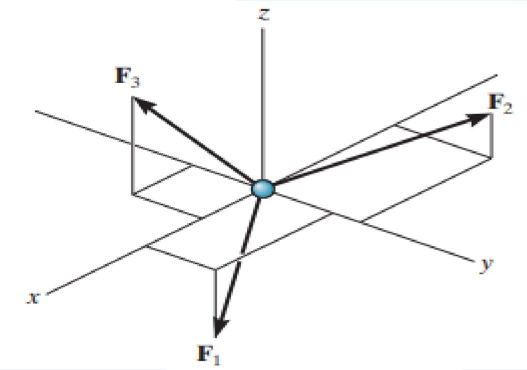
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{AB} \sin 15^\circ - 10(9.81)\text{ N} = 0$$
$$T_{AB} = 379.03\text{ N} = 379\text{ N}$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad T_{BC} - 379.03\text{ N} \cos 15^\circ = 0$$
$$T_{BC} = 366.11\text{ N} = 366\text{ N}$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad T_{CD} \cos \theta - 366.11\text{ N} = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad T_{CD} \sin \theta - 15(9.81)\text{ N} = 0$$
$$T_{CD} = 395\text{ N}$$
$$\theta = 21.9^\circ$$



توازن الجسيم في الفراغ

الشرط اللازم والكافي لتوازن الجسيم في الفراغ هو أن يكون المجموع الشعاعي لكافة القوى الخارجية المؤثرة على الجسين مساويا للصفر.

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$



في الفراغ ثلاثي الأبعاد يمكن تحليل القوى إلى مركبات **I.j,k** أي أن :

$$\sum F_x \,.\boldsymbol{i} + \sum F_y \,.\boldsymbol{j} + \sum F_z .\mathbf{k} = 0$$

من أجل تحقيق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

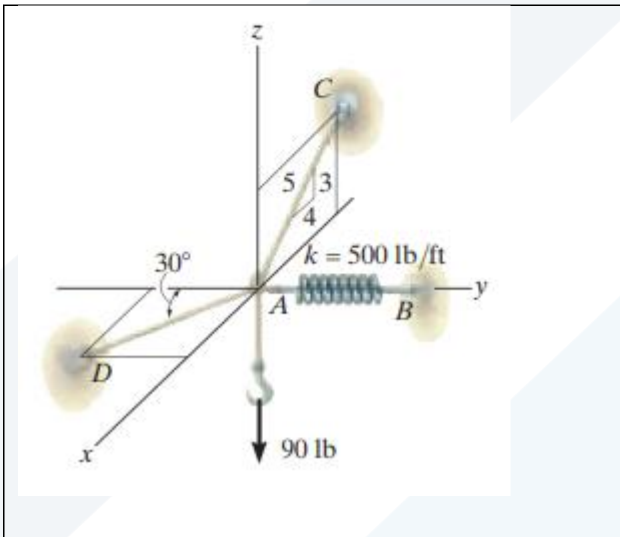
$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

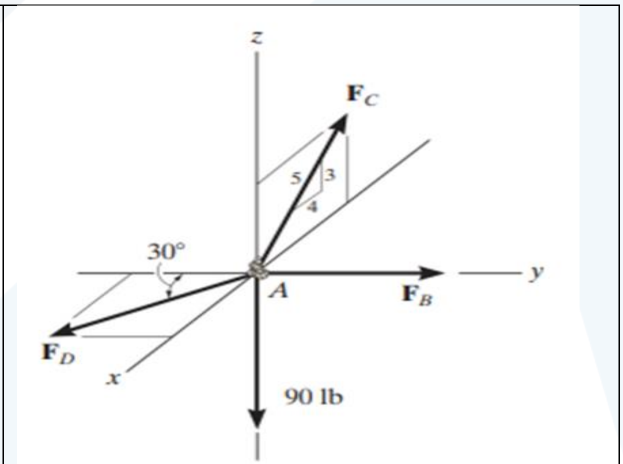
$$\sum F_z = 0 \quad (3)$$

هذه المعادلات الثلاث تبيّن أن المجموع الجبري لمركبات كافة القوى وفق المحاور x ,y ,z يجب أن يكون مساويا للصفر.

EXAMPLE11:

A 90-lb load is suspended from the hook shown in Fig. a. If the load is supported by two cables and a spring having a stiffness k = 500 lb/ft, determine the force in the cables and the stretch of the spring for equilibrium. Cable AD lies in the x–y plane and cable AC lies in the x–z plane





(b)

Free-Body Diagram: The connection at A is chosen for the equilibrium analysis since the cable forces are concurrent at this point.

The free-body diagram is shown in Fig. b.

Equations of Equilibrium: By inspection, each force can easily be resolved into its x, y, z components, and therefore the three scalar equations of equilibrium can be used. Considering components Directed along each positive axis as “positive,” we have:

$$\Sigma F_x = 0; \qquad F_D \sin 30^\circ - \left(\tfrac{4}{5}\right) F_C = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -F_D \cos 30^\circ + F_B = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \left(\tfrac{3}{5}\right) F_C - 90 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$

$$F_C = 150 \text{ lb}$$

$$F_D = 240 \text{ lb}$$

$$F_B = 207.8 \text{ lb} = 208 \text{ lb}$$

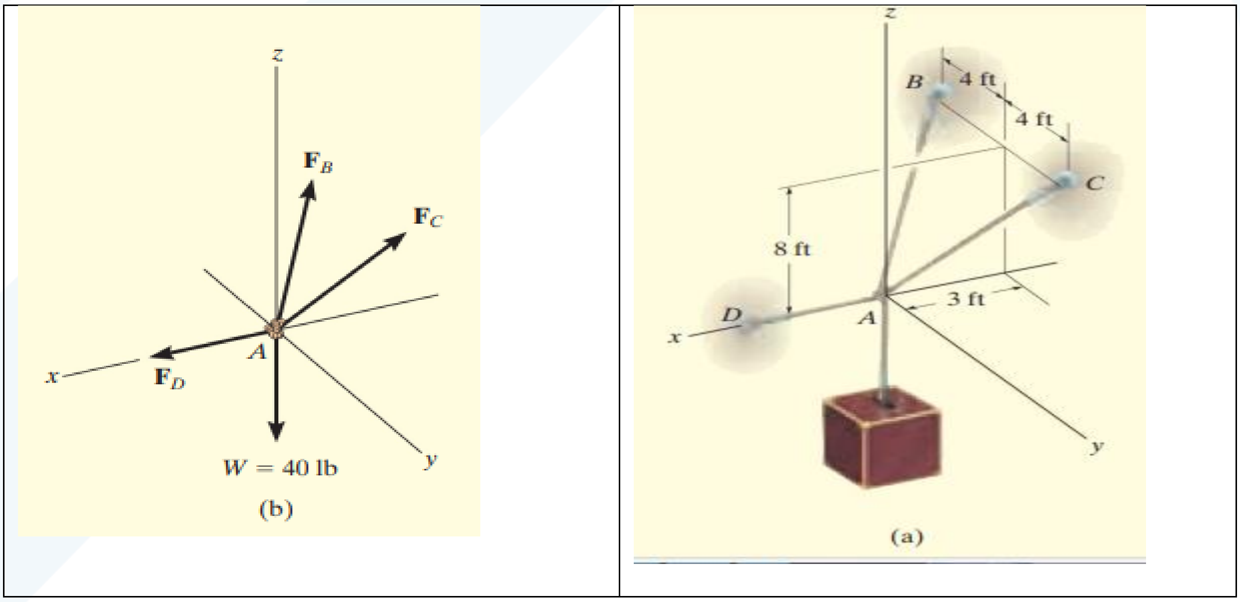
$$F_B = ks_{AB}$$

$$207.8 \text{ lb} = (500 \text{ lb/ft})(s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.416 \text{ ft}$$

EXAMPLE12 : **Determine the force in each cable used to support the**

40-lb crate shown in Fig. a



(b)

(a)

Equations of Equilibrium: **First we will express each force in Cartesian vector form. Since the coordinates of points B and C are B(-3 ft, -4 ft, 8 ft) and C(-3 ft, 4 ft, 8 ft), we have**

$$\mathbf{F}_B = F_B\left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_C = F_C\left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}}\right]$$
$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\}\ \text{lb}$$

Equilibrium requires :

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}; \qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$-0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$
$$-0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

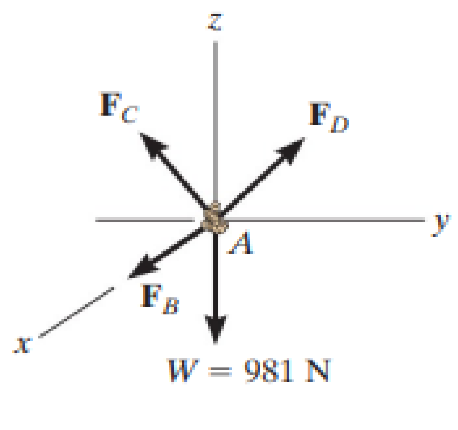
Equating the respective i, j, k components to zero yields

$$\Sigma F_x = 0; \qquad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0; \qquad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0; \qquad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0 \qquad (3)$$

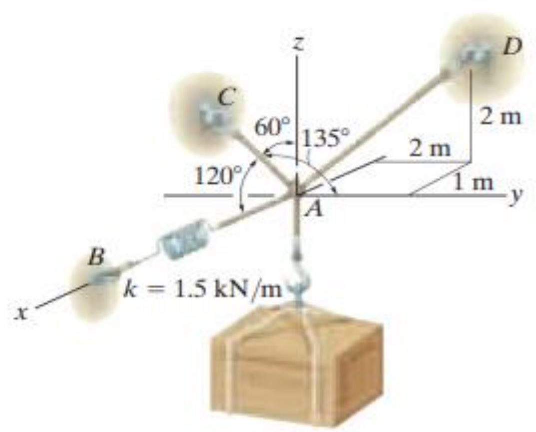
$$F_B = F_C = 23.6\ \text{lb}$$
$$F_D = 15.0\ \text{lb}$$

EXAMPLE13:**Determine the tension in each cord used to support the**

100-kg crate shown in Fig. a



(b)



(a)

Solution :

Free-Body Diagram: **The force in each of the cords can be determined**

by investigating the equilibrium of point A. The free-body diagram is

shown in Fig. 3–13b. The weight of the crate is W = 100(9.81) = 981 N

Equations of Equilibrium:

Each force on the free-body diagram is first expressed in Cartesian vector form.

$$\mathbf{F}_B = F_B\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C\cos 120°\mathbf{i} + F_C\cos 135°\mathbf{j} + F_C\cos 60°\mathbf{k}$$
$$= -0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\left[\frac{-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$
$$= -0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = \{-981\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

Equilibrium requires :

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0};\qquad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$
$$F_B\mathbf{i} - 0.5F_C\mathbf{i} - 0.707F_C\mathbf{j} + 0.5F_C\mathbf{k}$$
$$-0.333F_D\mathbf{i} + 0.667F_D\mathbf{j} + 0.667F_D\mathbf{k} - 981\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

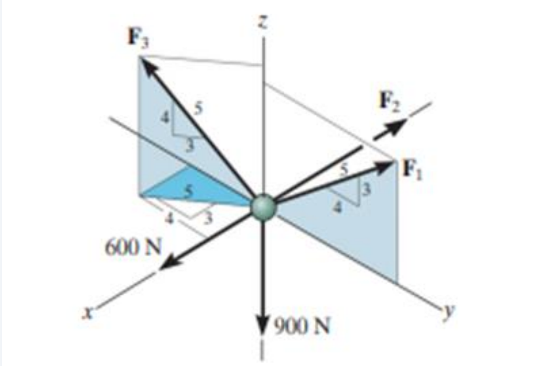
Equating the respective i, j, k components to zero :

$$\Sigma F_x = 0;\qquad F_B - 0.5F_C - 0.333F_D = 0$$
$$\Sigma F_y = 0;\qquad -0.707F_C + 0.667F_D = 0$$
$$\Sigma F_z = 0;\qquad 0.5F_C + 0.667F_D - 981 = 0$$

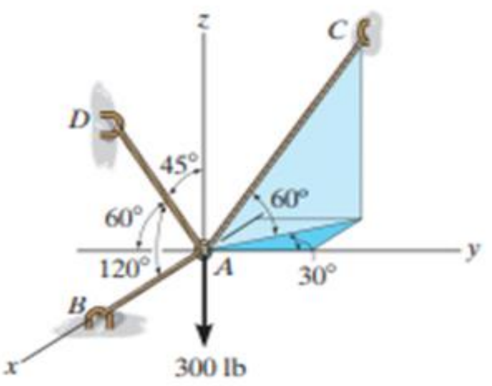
$$F_C = 813\ \text{N}$$
$$F_D = 862\ \text{N}$$
$$F_B = 694\ \text{N}$$

EXAMPLE14 **:Determine the magnitude of forces F1, F2, F3, so that the particle is held in equilibrium**

$$\Sigma F_x = 0;\quad \left[\left(\tfrac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\tfrac{3}{5}\right) + 600\text{ N} - F_2 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0;\quad \left(\tfrac{4}{5}\right)F_1 - \left[\left(\tfrac{3}{5}\right)F_3\right]\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0$$
$$\Sigma F_z = 0;\quad \left(\tfrac{4}{5}\right)F_3 + \left(\tfrac{3}{5}\right)F_1 - 900\text{ N} = 0$$
$$F_3 = 776\text{ N}$$
$$F_1 = 466\text{ N}$$
$$F_2 = 879\text{ N}$$



EXAMPLE15 :**Determine the tension developed in cables AB, AC, and AD**.



$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\{-\cos 60^\circ \sin 30^\circ\,\mathbf{i} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ\,\mathbf{j} + \sin 60^\circ\,\mathbf{k}\}$$
$$= -0.25F_{AC}\,\mathbf{i} + 0.4330F_{AC}\,\mathbf{j} + 0.8660F_{AC}\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_{AD} = F_{AD}\{\cos 120^\circ\,\mathbf{i} + \cos 120^\circ\,\mathbf{j} + \cos 45^\circ\,\mathbf{k}\}$$
$$= -0.5F_{AD}\,\mathbf{i} - 0.5F_{AD}\,\mathbf{j} + 0.7071F_{AD}\,\mathbf{k}$$
$$\Sigma F_y = 0;\quad 0.4330F_{AC} - 0.5F_{AD} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0;\quad 0.8660F_{AC} + 0.7071F_{AD} - 300 = 0$$
$$F_{AD} = 175.74\text{ lb} = 176\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$
$$F_{AC} = 202.92\text{ lb} = 203\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} - 0.25(202.92) - 0.5(175.74) = 0$$
$$F_{AB} = 138.60\text{ lb} = 139\text{ lb} \qquad \textit{Ans.}$$