المحاضرة الر ابعة – ميكانيك هندسي -د. نزار عبد الرحمن

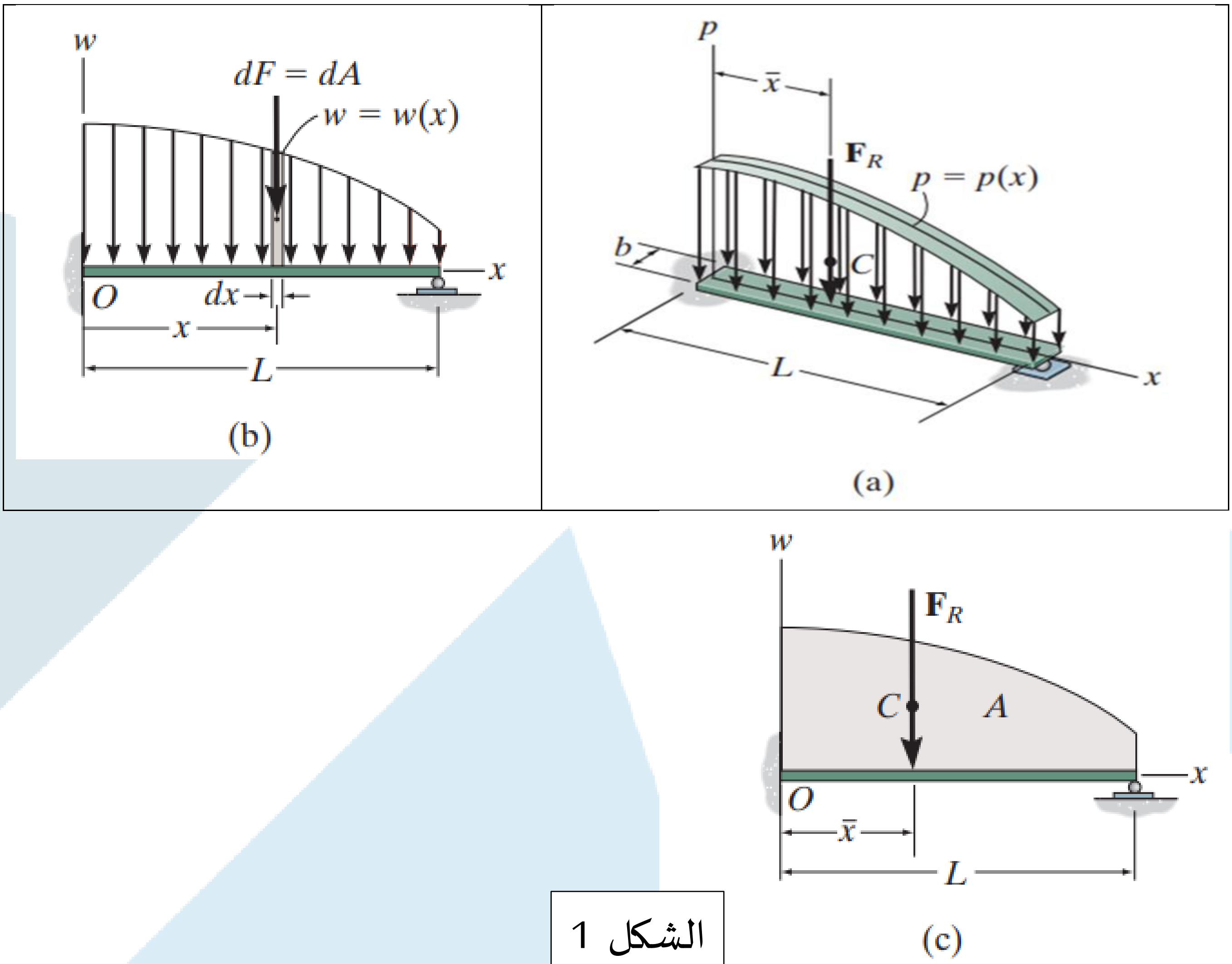
تمثيل الحمولات الموزعة

توازن الجسم الصلب في المستوي Equilibrium of a Rigid Body-

تتعرض الأجسام أحيانا لنوع من الحمولات الموزعة ،مثل ضغط الرياح على السطوح ، وضغط المياه على جدران الخز انات ، ووزن التربة على أرضية المستودعات ، ووزن الكتب على رفوف المكاتب ....

في مثل هذه الحالات يؤثر الضغط على كل نقطة من المساحة ، ويقاس الضغط على واحدة المساحة بالباسكال $\{N/m^2\}$ Pa.

الحمولة على امتداد محورو حيد :



الشكل 1

يمكن تمثيل الغالبية العظمى من الحمولات الموزعة المستخدمة في التطبيقات الهندسية على استقامة محوروحيد .مثال العتبة المبينة في الشكل 1ذات عرض ثابت ، ومعرضة لحمولة ضغط على طول المحورx. يمكن تمثيل الحمولة عن طريق التابع .p= p (x){N/m²}. تحتوي المعادلة على متغيرواحد x, ولهذا السبب يمكننا تمثيل الحمولة كحمولة موزعة مستوية . من أجل هذا نقوم بضرب تابع الحمولة بالعرض b للعتبة ، ينتج لدينا : p= p (x) . b {N/m} .

يمكن تمثيل هذه القوى المستوية المتوازية بقوة محصلة وحيدة FR

شدة قوة المحصلة :

شدة المحصلة تكافئ مجموع كافة القوى . في هذه الحالة نستخدم التكامل من أجل عدد لانهائي من القوى dF المؤثرة على العتبة ، حيث أن القوة dFتؤثرعلى عنصر الطول dx، و w (x)عبارة عن القوة على واحدة الطول .

dF= w(x).dx=dA

بكلمات أخرى شدة القوة dF يتم تحديدها عن طريق المساحة التفاضلية dA تحت خط الحمولة ولكامل الطول L.

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad \boxed{F_R = \int_L w(x)\,dx = \int_A dA = A}$$

شدة قوة المحصلة تساوي المساحة تحت مخطط الحمولة .

نقطة تأثير محصلة القوى :

يمكن حساب خط تأثير المحصلة عن طريق تطبيق معادلة العزم حول النقطة O لكامل الطول ، حيث أن القوة dF تنتج عزما

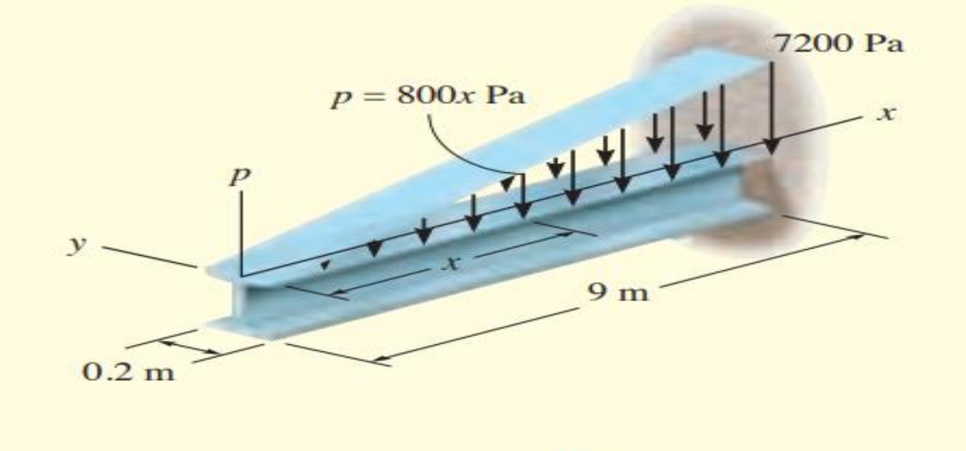
xdF = xw(x)dx

$$\circlearrowleft + (M_R)_O = \Sigma M_O; \qquad -\bar{x}F_R = -\int_L xw(x)\,dx$$

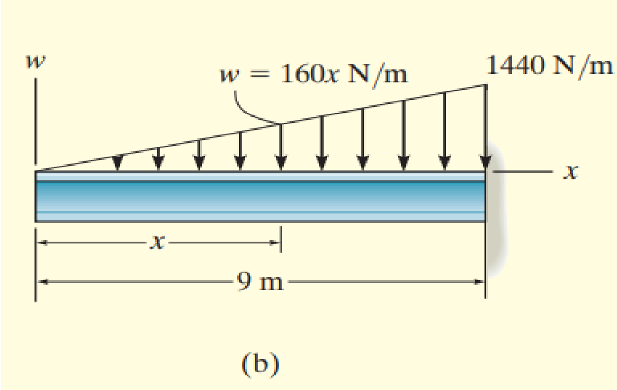
$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x)\, dx}{\int_L w(x)\, dx} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA}$$

تمثل الاحداثية x مركز المحل الهندسي للمساحة تحت الحمولة الموزعة . أي أن قوة المحصلة تمتلك خط تأثير بحيث يمر بالمركز الهندسي للمساحة C تحت منحني الحمولة .
في حالات كثيرة يمكن حساب المركز الهندسي لأشكال هندسية شهيرة(مثلث ، مستطيل ...)بدون اللجوء إلى علاقة التكامل السابقة .

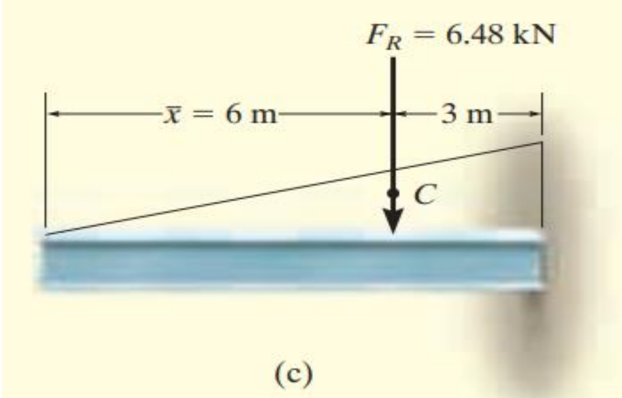
مسألة1: حمولة موزعة p=(800x) Pa تؤثر على السطح العلوي للعتبة . أوجد شدة وموقع محصلة الحمولة .



(a)



(b)



(c)

الحل : بما أن شدة الحمولة موزعة بانتظام على عرض العتبة (المحورY) ، يمكن تمثيل الحمولة في المستوي :

عند X= 9m تكون قيمة الحمولة مساوية 1440N/m.

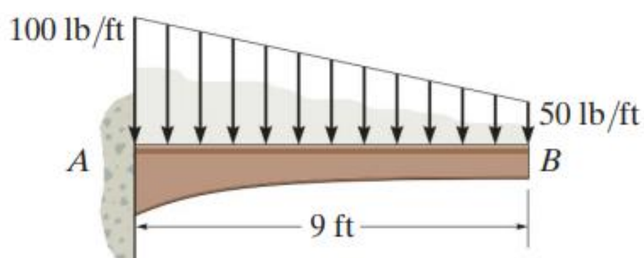
شدة المحصلة تكافئ مساحة المثلث :

$$F_R = \tfrac{1}{2}(9\text{ m})(1440\text{ N/m}) = 6480\text{ N} = 6.48\text{ kN}$$

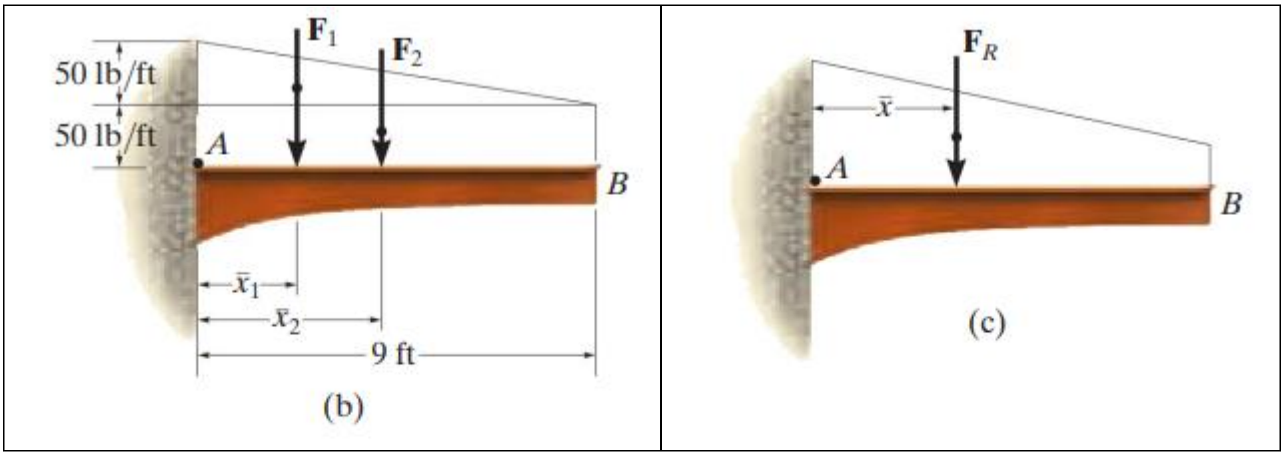
خط تأثير المحصلة يمر عبر المركز الهندسي للمثلث ، أي أن :

$$\bar{x} = 9\text{ m} - \tfrac{1}{3}(9\text{ m}) = 6\text{ m}$$

مسألة2 : من أجل الحمولة الموزعة على العتبة ، احسب شدة وموقع المحصلة .



(a)



الحل : المساحة تحت مخطط الحمولة عبارة عن شبه منحرف ، يمكن حل المسألة بتقسيم مساحة شبه المنحرف إلى مساحتين : الأولى على شكل مستطيل والثانية على كل شبه منحرف .

محصلة القوة لكل جزء عبارة عن مساحة كل جزء:

$$F_1 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ ft})(50 \text{ lb/ft}) = 225 \text{ lb}$$

$$F_2 = (9 \text{ ft})(50 \text{ lb/ft}) = 450 \text{ lb}$$

خط تأثير المحصلة للقوتين المتوازيتين يمر عبر المركز الهندسي لكل مساحة

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3}(9 \text{ ft}) = 3 \text{ ft}$$

$$\bar{x}_2 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ ft}) = 4.5 \text{ ft}$$

يمكن الآن حساب محصلة القوتين المتوازيتين F1وF2:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F; \qquad F_R = 225 + 450 = 675 \text{ lb}$$

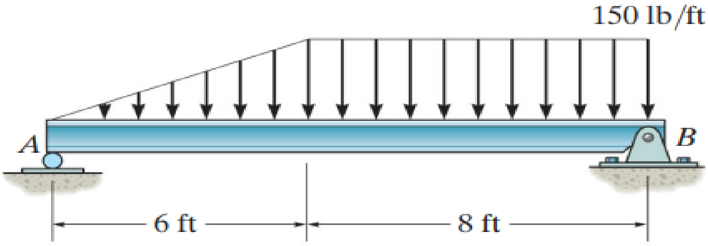
يمكن الآن حساب موقع المحصلة FR بالنسبة للنقطة A عن طريق كتابة معادلة العزم بالنسبة للنقطة A:

$$\curvearrowright + (M_R)_A = \Sigma M_A; \quad \bar{x}(675) = 3(225) + 4.5(450)$$

$$\bar{x} = 4 \text{ ft}$$

يمكن حل المسألة أيضا عن طريق تقسيم المساحة الكلية إلى مثلثين .

مسألة 3: احسب القوة المحصلة ومنحاها مقاساً من النقطة A.



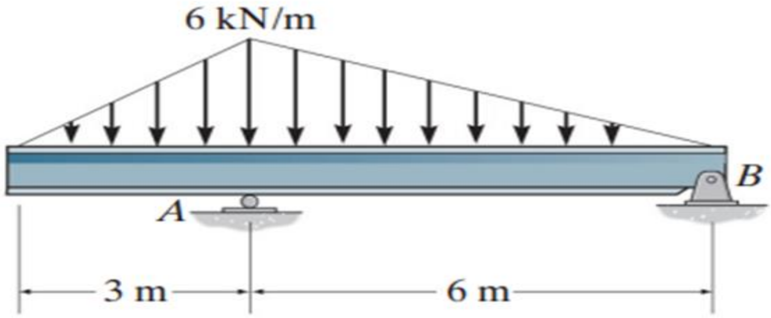
$$F_R = \tfrac{1}{2}(6)(150) + 8(150) = 1650 \text{ lb}$$

$$\circlearrowleft +M_{A_R} = \Sigma M_A;$$

$$1650d = \left[\tfrac{1}{2}(6)(150)\right](4) + [8(150)](10)$$

$$d = 8.36 \text{ ft}$$

مسألة 4: احسب القوة المحصلة ومنحاها مقاساً من النقطة A.



$$+\uparrow F_R = \Sigma F_y;$$

$$-F_R = -\tfrac{1}{2}(6)(3) - \tfrac{1}{2}(6)(6)$$

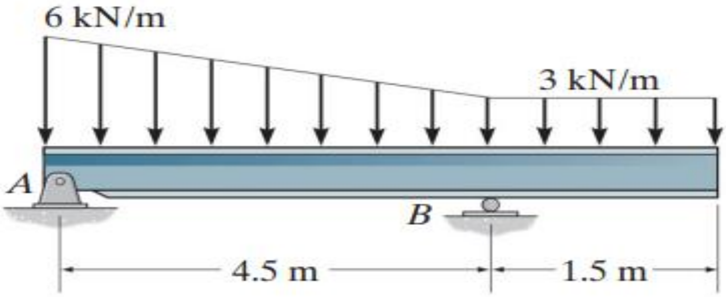
$$F_R = 27 \text{ kN}\downarrow$$

$$\circlearrowleft +(M_R)_A = \Sigma M_A;$$

$$-27(d) = \tfrac{1}{2}(6)(3)(1) - \tfrac{1}{2}(6)(6)(2)$$

$$d = 1 \text{ m}$$

مسألة 5: احسب القوة المحصلة ومنحاها مقاساً من النقطة A.



$$+\uparrow F_R = \Sigma F_y;$$
$$-F_R = -\tfrac{1}{2}(3)(4.5) - 3(6)$$
$$F_R = 24.75\ \text{kN}\downarrow$$
$$\circlearrowleft +(M_R)_A = \Sigma M_A;$$
$$-24.75(d) = -\tfrac{1}{2}(3)(4.5)(1.5) - 3(6)(3)$$
$$d = 2.59\ \text{m}$$

توازن الجسم الصلب

- شروط توازن الجسم الصلب .
- مخطط الجسم الحر.
- معادلات التوازن .

العناصر المتوازنة تحت تأثير قوتين ، وثلاث قوى .

الشرطين اللازمين والكافيين من أجل توازن الجسم الصلب هما :

- أن يكون المجموع الشعاعي لكافة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم ، مساويا للصفر.
- أن يكون مجموع العزوم حول نقطة محددة مساويا للصفر.

أي أن :

$$\sum F = 0$$

$$\sum M_O = 0$$

مراحل دراسة توازن الجسم الصلب :

أولا : رسم مخطط الجسم الحر Free-Body Diagrams

نتخيّل الجسم حراً في الفراغ محرراً من كافة قيوده ونستبدل عن هذه القيود بالقوى وردود الأفعال المناسبة ، وفق قواعد رسم مخطط الجسم الحر المبينة في الجدول التالي .

القيد : هو كل ما يمنع حركة الجسم في الفراغ (كبل ، حبل ، سطح أو نقطة استناد ، مفصل ....)

مراحل رسم مخطط الجسم الحر :

1.ارسم الاطار الخارجي للجسم.

2.تخيّل الجسم حرّا في الفراغ محررا من كافة قيوده

3 .مثّل على المخطط كافة القوى الخارجية وعزوم المزدوجات ووزن الجسم .

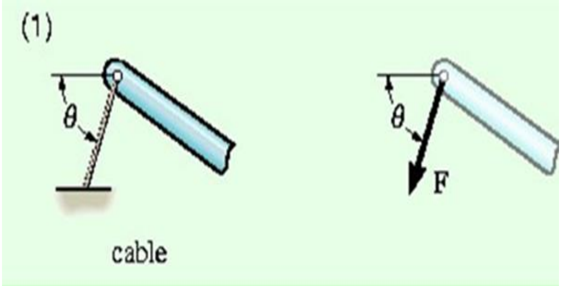
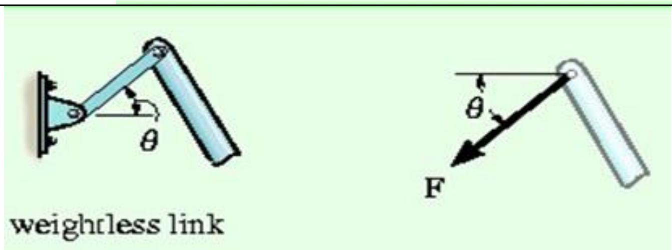
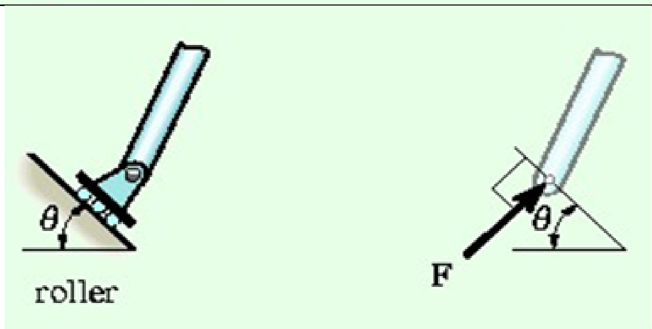
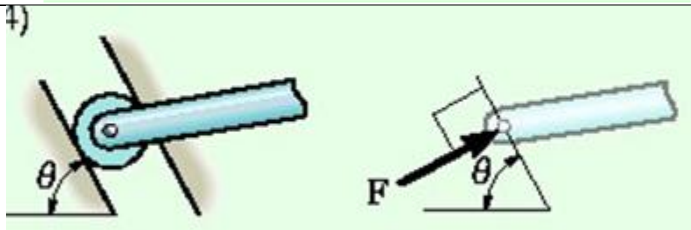
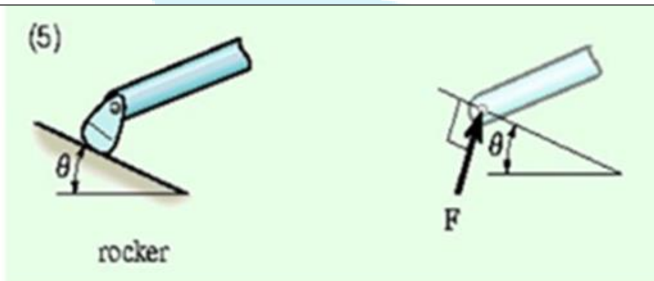
4.استبدل عن القيود بالقوى وردود الأفعال المناسبة وفق قواعد رسم مخطط الجسم الحر

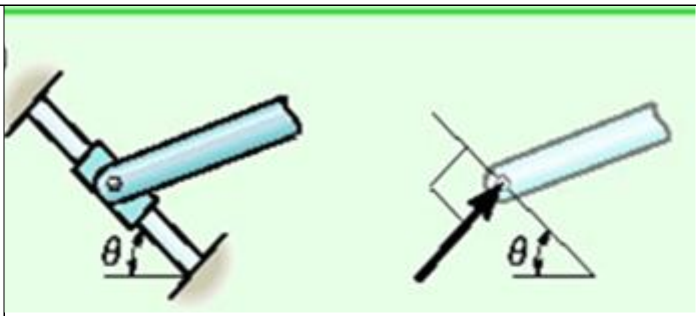
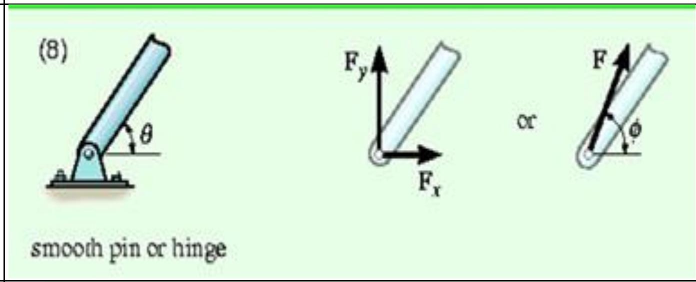
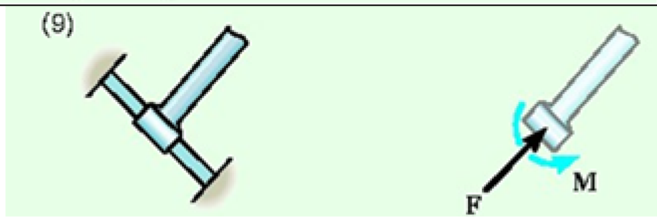
5. حدد محاور الاحداثيات من أجل الاسقاط .

6. حدّد النقطة المراد حساب العزم حولها بحيث يلتقي فيها أكبر عدد من المجاهيل .

قواعد رسم مخطط الجسم الحر :

نوع الاستناد ورسم المخطط	عدد المجاهيل

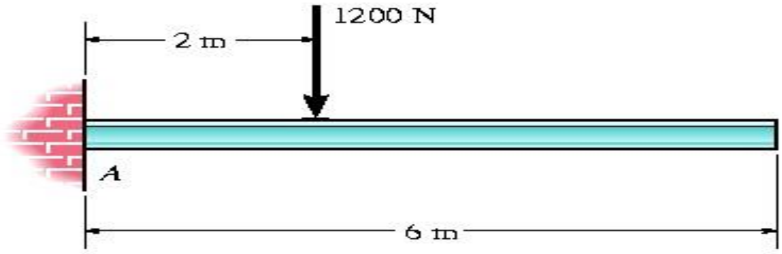
كبل أو حبل : رد فعل وحيد باتجاه اكبل أو الحبل .	
وصلة مفصلية قصيرة مهملة الكتلة : رد فعل وحيد باتجاه الوصلة.	
مفصل متحرك (كرات): رد فعل وحيد عمودي عبى سطح الاستناد .	
مفصل متحرك (عجلة) : رد فعل وحيد عمودي على سطح الاستناد .	
مفصل متحرك (ذراع متأرجح): رد فعل وحيد عمودي على سطح الاستناد .	

	الاستناد على دليل أملس مع قابلية الدوران : رد فعل وحيد عمودي على سطح الاستناد.
	وصلة مفصلية : مركبتين لرد الفعل وفق الاتجاهين الأفقي والعمودي .
	الاستناد على دليل أملس بدون دوران :رد فعل عمودي على الدليل وعزم مزدوجة
	التثبيت التام (وثاقة) : مركبتين لرد الفعل تمنعان الجسم من الحركة وفق الاتجاهين الأفقي والعمودي ، وعزم مزدوجة تمنع دوران العتبة

إذا كان القيد يمنع انتقال الجسم وفق اتجاه معيّن ، عندها يوجد رد فعل للقيد ،نفرضه عكس الاتجاه الذي يمنع فيه القيد الجسم من الحركة .

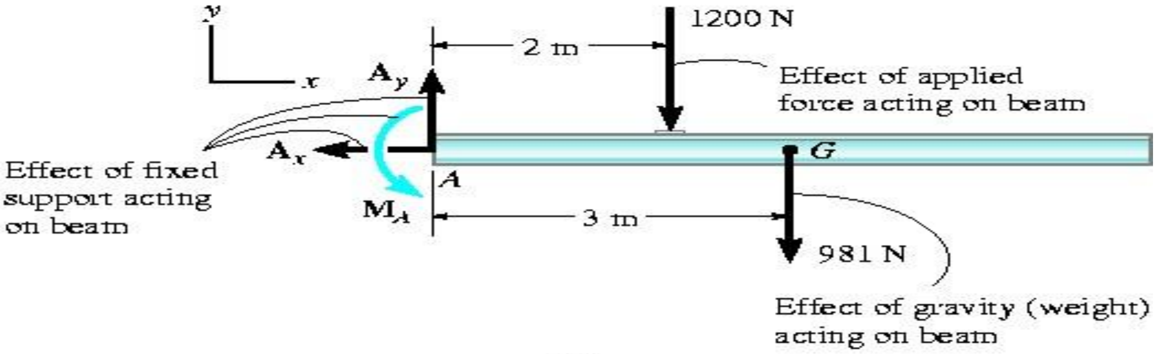
إذا كان القيد يمنع الجسم من الدوران ، عندها يوجد عزم مزدوجة تؤثرعلى الجسم ونفرض جهة دورانها بعكس الاتجاه الذي يمنع في القيد الجسم من الدوران .

مثال 1 : ارسم مخطط الجسم الحرللعتبة المبينة . كتلة العتبة 100kg.



(a)

الحل: Free-Body Diagram

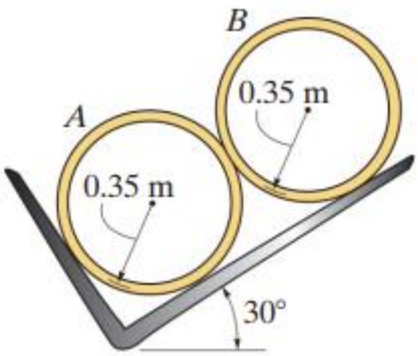


(b)

القيد عند Aتثبيت تام : لدينا مركبتين لرد الفعل وفق : X-Y،تمنعان حركة الانتقال للعارضة وفق المستويين الأفقي والعمودي Ax,Ay. وعزم مزدوجة MAتمنع العارضة من الدوران .

مثال 2 : انبوبين اسطوانتين ذات سطوح ملساء ، يستندان على شوكة رافعة ،كتلة كل انبوب 300 كيلوغرام ،

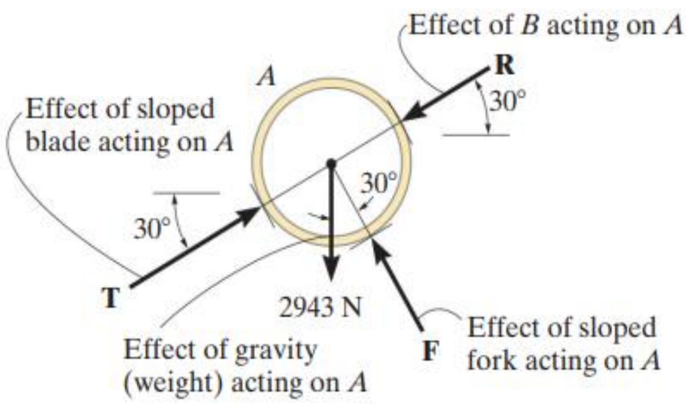
ارسم مخطط الجسم الحركل انبوب ، وللأنبوبين معاَ .



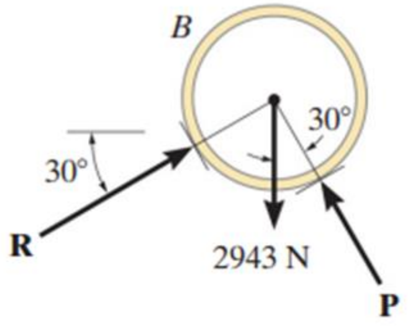
(b)

(a)

- الحل : وزن كل انبوب $W = 300(9.81) = 2943N$ ، لدينا ثلاث قوى T ,R,F تكون عمودية على المماس عند سطوح الاستناد .



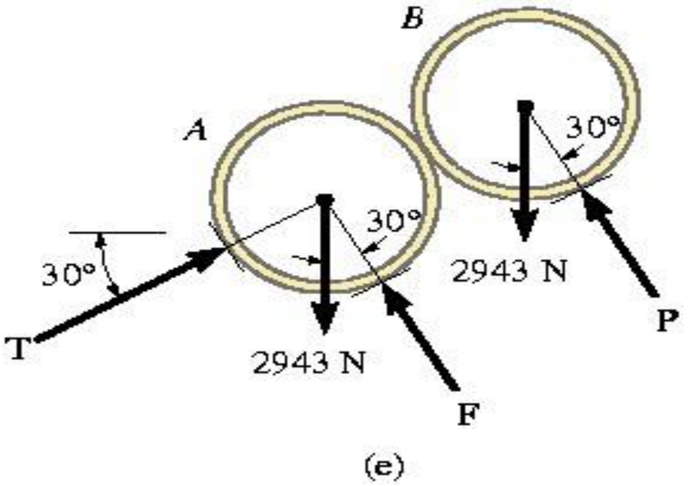
(c)



(d)

مخطط الجسم الحر للأنبوب A

مخطط الجسم الحر للأنبوب B



مخطط الجسم الحر لكلا الأنبوبين

ثانيا : كتابة معادلات التوازن

الشكل الأول لمعادلات التوازن

$\sum F_x = 0$ مجموع مركبات القوى على المحور X يساوي الصفر

$\sum F_y = 0$ مجموع مركبات القوى على المحور y يساوي الصفر

$\sum M_O = 0$ مجموع العزوم حول نقطة اختيارية يساوي الصفر.

الشكل الثاني لمعادلات التوازن :عند تطبيق هذا الشكل يجب أن يكون المستقيم الواصل بين النقطتين A وB غير متعامد مع المحور a

$\sum F_a = 0 \quad (1)$

$\sum M_A = 0 \quad (2)$

$\sum M_B = 0 \quad (3)$

الشكل الثالث لمعادلات التوازن (معادلات العزوم الثلاث):

$\sum M_A = 0$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

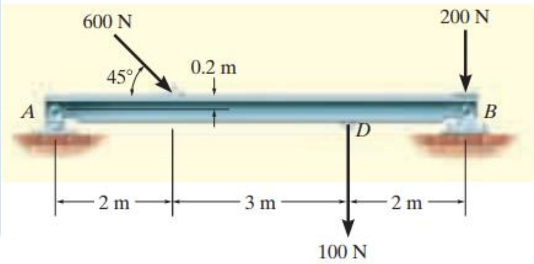
عند تطبيق هذا الشكل يجب أن لا تقع النقاط A,B,C على استقامة واحدة.

- نحدد محاور الاسقاط بحيث يكون أحد المحاور متعامدا مع إحدى القوى المجهولة .

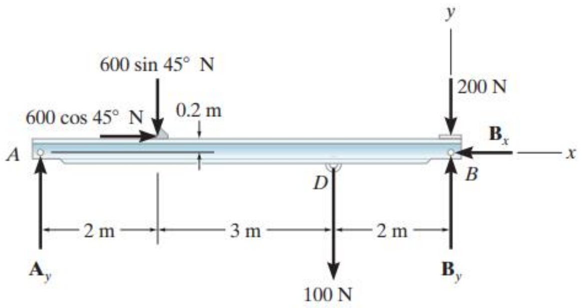
- نحدد النقطة التي يتم حساب العزم عندها بحيث يلتقي عندها أكبر عدد من المجاهيل

بشكل عام نفرض اتجاه القوى المجهولة ، إذا نتج لدينا بعد حل المعادلات وحساب المجاهيل أن إشارة إحدى القوى سالبة فهذا يعني أن الاتجاه الصحيح لهذه القوة عكس الاتجاه الصحيح .

مسألة 3 : احسب المركبات الأفقية والعمودية لردود الأفعال للعتبة المحمّلة كما في الشكل ، بإهمال وزن العتبة .



(a)



(b)

مخطط الجسم الحر : الشكل (b) .

معادلات التوازن :

$$\sum F_x = 0,\ 600 \cos 45 - B_X = 0 \quad (1)$$

$$B_X = 424\ N$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$100N(2m) + (600\sin 45^\circ N)(5m) - (600\cos 45^\circ N)(0.2m) - A_y(7m) = 0$$

$$A_y = 319N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$319N - 600\sin 45^\circ N - 100N - 200N + B_y = 0$$

$$B_y = 405N$$

معادلة التأكد :

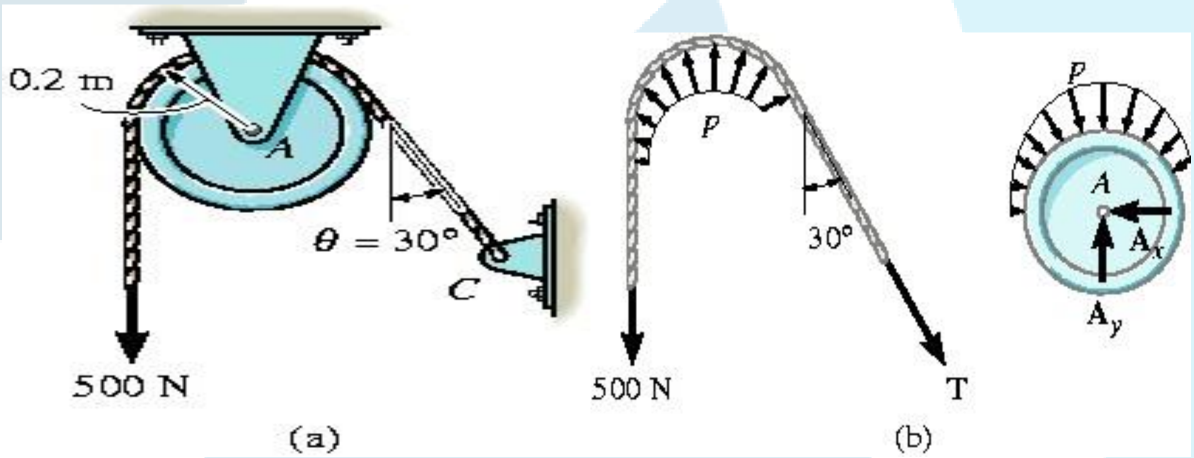
$$\sum M_A = 0;$$

$$-(600\sin 45^\circ N)(2m) - (600\cos 45^\circ N)(0.2m) - (100N)(5m)$$

$$-(200N)(7m) + B_y(7m) = 0$$

$$B_y = 405N$$

مسألة 4: حبل معرض لقوة 500N ويلتف حول بكرة بدون احتكاك .احسب قوة الشد في الحبل والمركبات الأفقية والعمودية لرد الفعل عند المفصل A.



$+\rightarrow \sum F_x = 0;$ $-A_x + 500\sin 30^{\circ}\, N = 0$ $Ax = 250N$ $+\uparrow \sum F_y = 0;$ $A_y - 500N - 500\cos 30^{\circ}\, N = 0$ $A_y = 933N$