

## المحاضرة الخامسة - ميكانيك هندسي - د.نزار عبد الرحمن

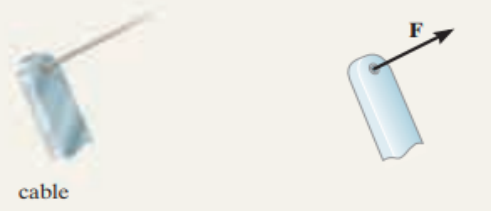



### توازن الأجسام في الفراغ

تتم دراسة توازن الأجسام في الفراغ بنفس طريقة دراسة توازن الأجسام في المستوي .

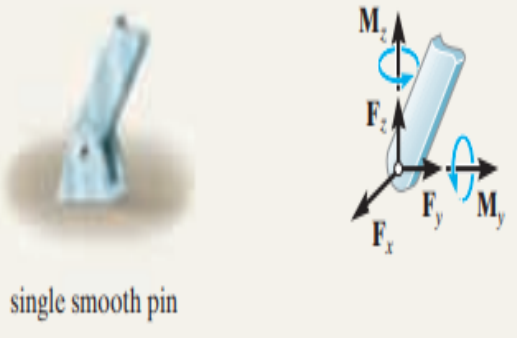
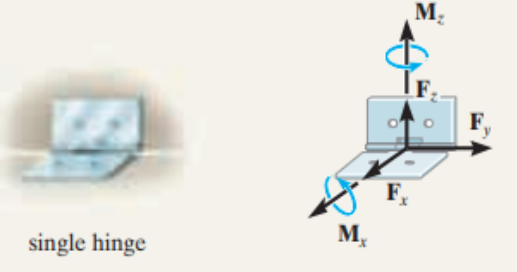
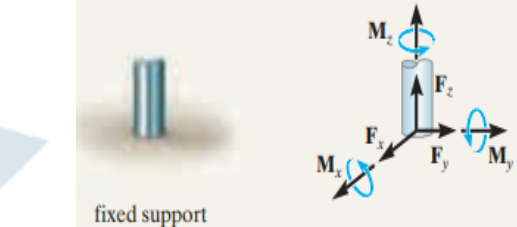
1- رسم مخطط الجسم الحر

2- كتابة معادلات التوازن .

قواعد رسم مخطط الجسم الحر:

<p>مجهول وحيد ، قوة باتجاه الكبل أو الحبل</p>	 <p>cable</p>	<p>1- جسم متصل بكبل أو حبل</p>
<p>رد فعل وحيد عمودي على سطح الاستناد</p>	 <p>(2) smooth surface support</p>	<p>2- الاستناد على سطح أملس</p>
<p>رد فعل وحيد عمودي على سطح الاستناد</p>	 <p>roller</p>	<p>3- عجلة</p>
<p>ثلاث مجاهيل : ثلاث ردود أفعال وفق المحاور <math>x, y, z</math></p>	 <p>(4) ball and socket</p>	<p>4 - كرة ومضجع كروي</p>

<p>أربعة مجاهيل : مركبتين لرد الفعل ، ومزدوجتين . متعامدة مع العمود . عادة لاتؤثر المزدوجات إذا كان الجسم متصل بنقاط تثبيت أخرى .</p>	<p>(5)</p>  <p>single journal bearing</p>	<p>5- محمل مفرد</p>
<p>خمسة مجاهيل : مركبتين لرد الفعل ، وثلاث عزوم مزدوجات . عادة لاتؤثر عزوم المزدوجات إذا كان الجسم متصل بنقاط تثبيت أخرى .</p>	<p>(6)</p>  <p>single journal bearing with square shaft</p>	<p>6- محمل مفرد مع عمود ذو مقطع مربع</p>
<p>خمسة مجاهيل : ثلاث مركبات لرد الفعل وفق المحاور الثلاث ، وعزومي مزدوجة . عادة لاتؤثر عزوم المزدوجات إذا اتصل الجسم بنقاط تثبيت أخرى .</p>	<p>(7)</p>  <p>single thrust bearing</p>	<p>7- محمل مفرد موثق</p>

<p>خمسة مجاهيل : ثلاث مركبات لرد الفعل ، وعزمي مزدوجة .عادة لا تؤثر عزم المزدوجات إذا اتصل الجسم بنقاط تثبيت أخرى .</p>	 <p>single smooth pin</p>	<p>8- مفصل مفرد أملس</p>
<p>خمسة مجاهيل : ثلاث مركبات لرد الفعل وعزمي مزدوجة .لا تؤثر عزم المزدوجات عادة عندما يتصل الجسم بنقاط تثبيت أخرى .</p>	 <p>single hinge</p>	<p>9- وصلة مفردة</p>
<p>ستة مجاهيل : ثلاث مركبات لردود الأفعال ، وثلاث عزم مزدوجة</p>	 <p>fixed support</p>	<p>10- التثبيت التام</p>

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma M_x \mathbf{i} + \Sigma M_y \mathbf{j} + \Sigma M_z \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

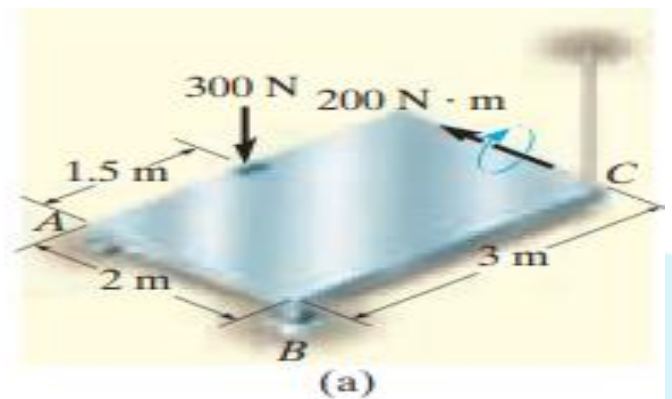
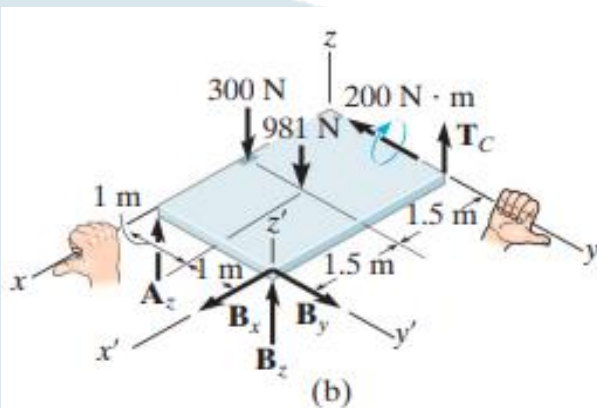
$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

**EXAMPLE 1:** The homogeneous plate shown in Fig has a mass of 100 kg and is subjected to a force and couple moment along its edges. If it is supported in the horizontal plane by a roller at A, a ball-and-socket joint at B, and a cord at C, determine the components of reaction at these supports.



$$\Sigma F_x = 0; \quad B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad B_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad A_z + B_z + T_C - 300 \text{ N} - 981 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad T_C(2 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + B_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad 300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) + 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - B_z(3 \text{ m}) - A_z(3 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \quad (3)$$

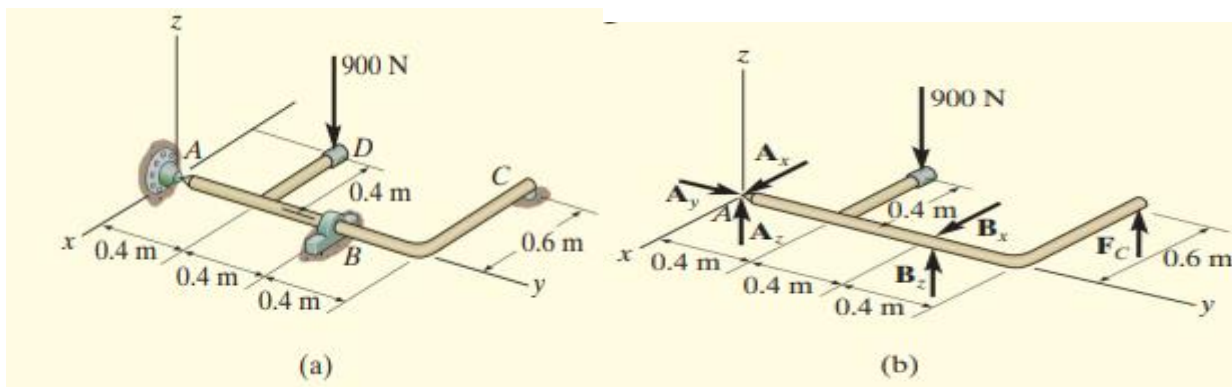
العزوم حول  $x'$ ,  $y'$

$$\Sigma M_{x'} = 0; \quad 981 \text{ N}(1 \text{ m}) + 300 \text{ N}(2 \text{ m}) - A_z(2 \text{ m}) = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_{y'} = 0; \quad -300 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 981 \text{ N}(1.5 \text{ m}) - 200 \text{ N} \cdot \text{m} + T_C(3 \text{ m}) = 0 \quad (5)$$

$$A_z = 790 \text{ N} \quad B_z = -217 \text{ N} \quad T_C = 707 \text{ N}$$

**EXAMPLE2 :** Determine the components of reaction that the ball-and-socket joint at A, the smooth journal bearing at B, and the roller support at C exert on the rod assembly in Fig. a



$$\sum F_y = 0; \quad A_y = 0$$

$$\sum M_y = 0; \quad F_C(0.6 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$$

$$F_C = 600 \text{ N}$$

$$\sum M_x = 0; \quad B_z(0.8 \text{ m}) + 600 \text{ N}(1.2 \text{ m}) - 900 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 0$$

$$B_z = -450 \text{ N}$$

$$\sum M_z = 0; \quad -B_x(0.8 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$$

Thus,

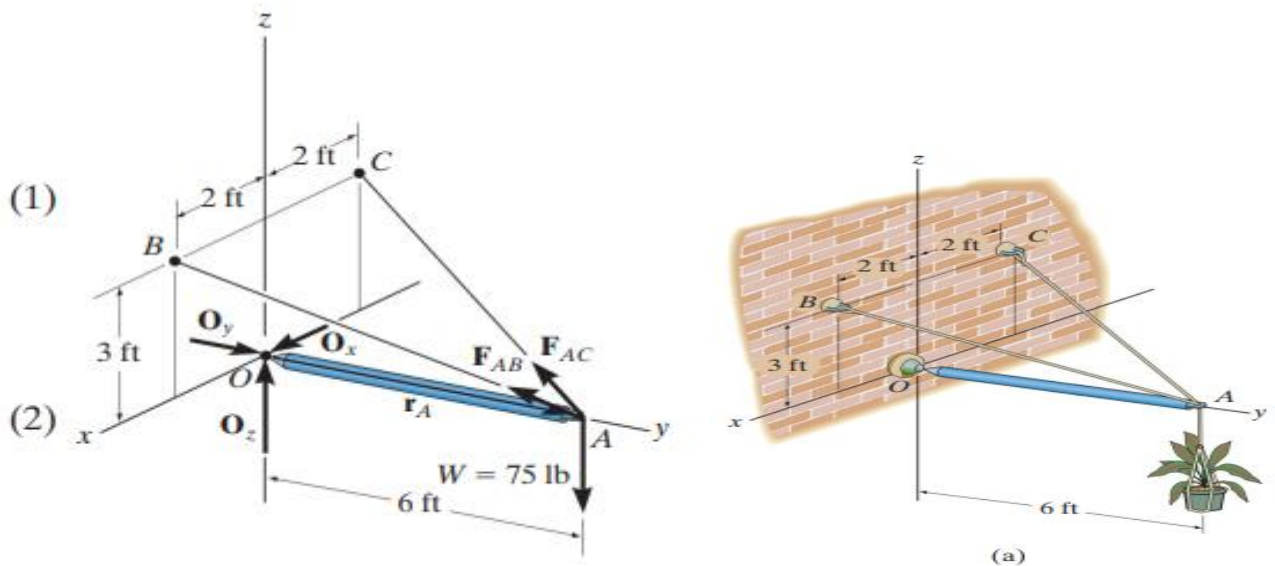
$$\sum F_x = 0; \quad A_x + 0 = 0 \quad A_x = 0$$

Finally, using the results of  $B_z$  and  $F_C$ .

$$\sum F_z = 0; \quad A_z + (-450 \text{ N}) + 600 \text{ N} - 900 \text{ N} = 0$$

$$A_z = 750 \text{ N}$$

**EXAMPLE 3 :**The boom is used to support the 75-lb flowerpot in Fig. a. Determine the tension developed in wires AB and AC.



$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB} \left( \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} \right) = F_{AB} \left( \frac{\{2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ ft}}{\sqrt{(2 \text{ ft})^2 + (-6 \text{ ft})^2 + (3 \text{ ft})^2}} \right)$$

$$= \frac{2}{7} F_{AB} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AB} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AB} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC} \left( \frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} \right) = F_{AC} \left( \frac{\{-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\} \text{ ft}}{\sqrt{(-2 \text{ ft})^2 + (-6 \text{ ft})^2 + (3 \text{ ft})^2}} \right)$$

$$= -\frac{2}{7} F_{AC} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AC} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AC} \mathbf{k}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{W}) = \mathbf{0}$$

$$(6\mathbf{j}) \times \left[ \left( \frac{2}{7} F_{AB} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AB} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AB} \mathbf{k} \right) + \left( -\frac{2}{7} F_{AC} \mathbf{i} - \frac{6}{7} F_{AC} \mathbf{j} + \frac{3}{7} F_{AC} \mathbf{k} \right) + (-75\mathbf{k}) \right] = \mathbf{0}$$

$$\left( \frac{18}{7} F_{AB} + \frac{18}{7} F_{AC} - 450 \right) \mathbf{i} + \left( -\frac{12}{7} F_{AB} + \frac{12}{7} F_{AC} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

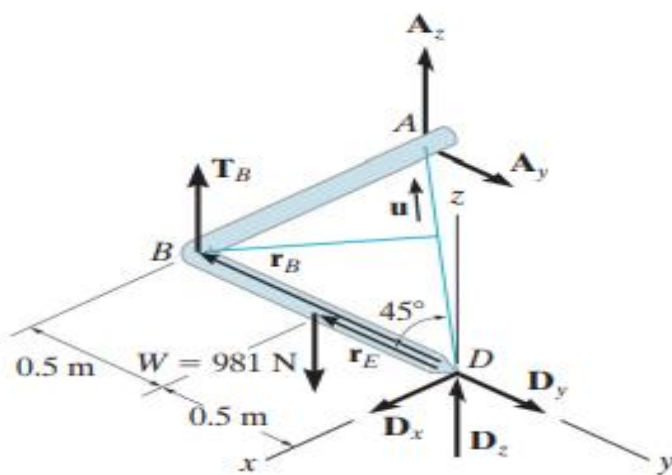
$$\Sigma M_x = 0; \quad \frac{18}{7}F_{AB} + \frac{18}{7}F_{AC} - 450 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad 0 = 0$$

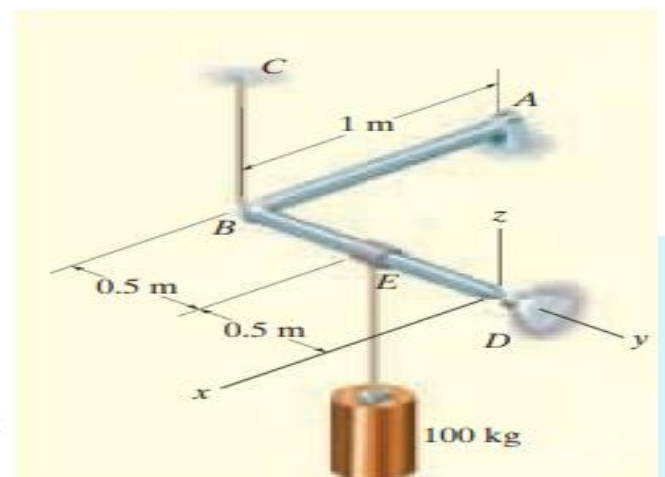
$$\Sigma M_z = 0; \quad -\frac{12}{7}F_{AB} + \frac{12}{7}F_{AC} = 0$$

$$F_{AB} = F_{AC} = 87.5 \text{ lb}$$

**EXAMPLE 4 :** The bent rod in Fig. a is supported at A by a journal bearing, at D by a ball-and-socket joint, and at B by means of cable BC. Using only one equilibrium equation, obtain a direct solution for the tension in cable BC. The bearing at A is capable of exerting force components only in the z and y directions since it is properly aligned on the shaft. In other words, no couple moments are required at this support.



(b)



(a)

The cable tension  $T_B$  may be obtained directly by summing moments about an axis that passes through points D and A. The direction of this axis is defined by the unit vector  $\mathbf{u}$ , where:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \\ &= -0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\Sigma M_{DA} = \mathbf{u} \cdot \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_B + \mathbf{r}_E \times \mathbf{W}) = 0$$

$$\begin{aligned}(-0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j}) \cdot [(-1\mathbf{j}) \times (T_B\mathbf{k}) \\ + (-0.5\mathbf{j}) \times (-981\mathbf{k})] = 0\end{aligned}$$

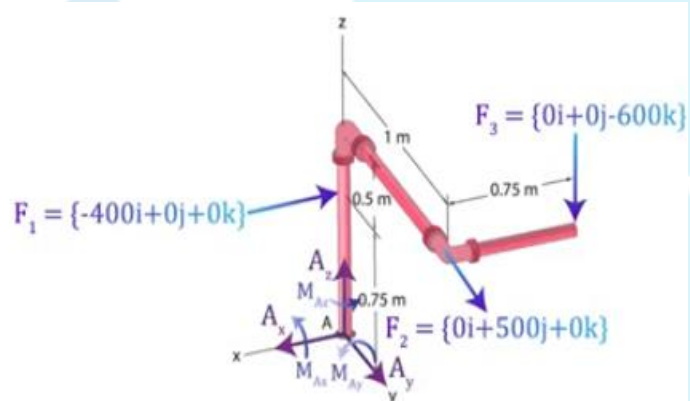
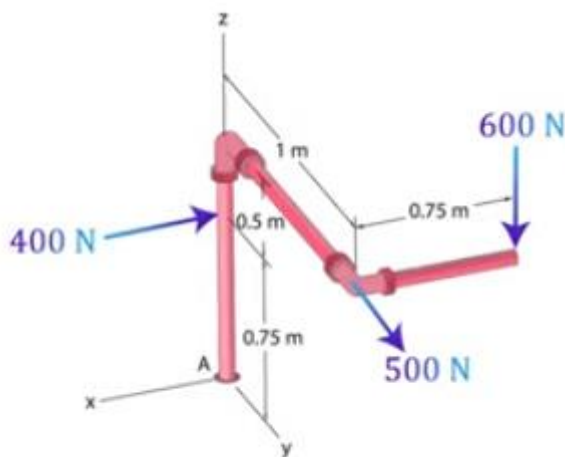
$$-0.7071\mathbf{i} - 0.7071\mathbf{j} \cdot [(-T_B + 490.5)\mathbf{i}] = 0$$

$$-0.7071(-T_B + 490.5) + 0 + 0 = 0$$

$$T_B = 490.5 \text{ N}$$

*Ans.*

**Example 5 : Determine the reactions at fixed support A .**



$$\sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad \sum F_x = 0$$

$$A_y + 500 = 0 \quad A_z - 600 = 0 \quad A_x - 400 = 0$$

$$A_y = -500 \quad A_z = 600 \quad A_x = 400 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_1 = \{-400\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{0\mathbf{i} + 500\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{F}_3 = \{0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 600\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{r}_1 = \{0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.75\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1.25\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{r}_3 = \{-0.75\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 1.25\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{M}_{A1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$$

$$\mathbf{M}_{A1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0.75 \\ -400 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{A1} = \{0\mathbf{i} - 300\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{M}_{A2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{M}_{A2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1.25 \\ 0 & 500 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{A2} = \{-625\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$\mathbf{M}_{A3} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{M}_{A3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.75 & 1 & 1.25 \\ 0 & 0 & -600 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{A3} = \{-600\mathbf{i} - 450\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\}$$

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{M}_{A1} + \mathbf{M}_{A2} + \mathbf{M}_{A3} = 0$$

$$(-625 - 600 + M_{Ax})\mathbf{i} + (-300 - 450 + M_{Ay})\mathbf{j} + (M_{Az})\mathbf{k} = 0$$

$$(-625 - 600 + M_{Ax})\mathbf{i} + (-300 - 450 + M_{Ay})\mathbf{j} + (M_{Az})\mathbf{k} = 0$$

i components

$$-625 - 600 + M_{Ax} = 0$$

$$M_{Ax} = 1225 \text{ N} \cdot \text{m}$$

j components

$$-300 - 450 + M_{Ay} = 0$$

$$M_{Ay} = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

k components

$$M_{Az} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$