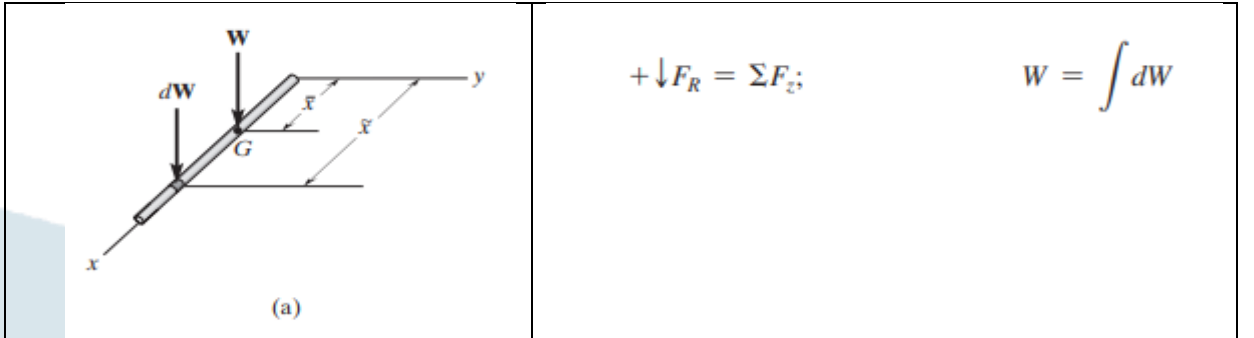


المحاضرة التاسعة – ميكانيك هندسي

د.نزار عبد الرحمن

مركز الجاذبية والمركز الهندسي - عزم العطالة

مركز الجاذبية هو النقطة التي تلتقي عندها محصلة الوزن للجسيمات التي يتألف منها الجسم. يتألف الجسم من مجموعة لانهائية من الجسيمات ذات حجم تفاضلي ووزن dw . تشكل هذه الأوزان نظام من القوى المتوازية، وتكون محصلة نظام القوى عبارة عن وزن الجسم الذي يمر بنقطة وحيدة "تدعى مركز الجاذبية" أو "مركز الثقل G" من أجل تحديد موقع مركز الثقل، نفرض قضيب بوزن dw مركزة في موقع غير محدد \tilde{x} . الوزن الكلي للقضيب يساوي مجموع الأوزان الجزئية لكافة الجسيمات التي يتألف منها.



بفرض لدينا نظام مؤلف من عدد من الجزئيات، محصلة الوزن يجب أن تساوي الوزن الكلي لكافة الجسيمات. من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة للمحور y ، نكتب معادلة العزوم للوزن W حول المحور y ، الذي يكون مساويا لعزم كافة الجزئيات حول نفس المحور:

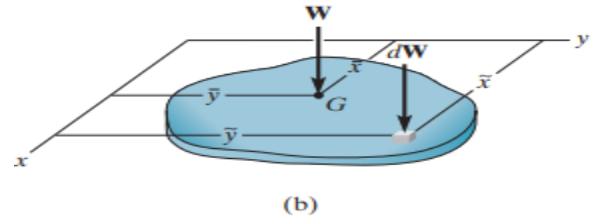
$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x}dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW}$$

بنفس الطريقة إذا كان الجسم عبارة عن صفيحة (الشكل b)، نستطيع كتابة معادلات توازن العزوم حول المحورين $x-y$ من أجل تحديد موقع المركز الثقل $G(x,y)$

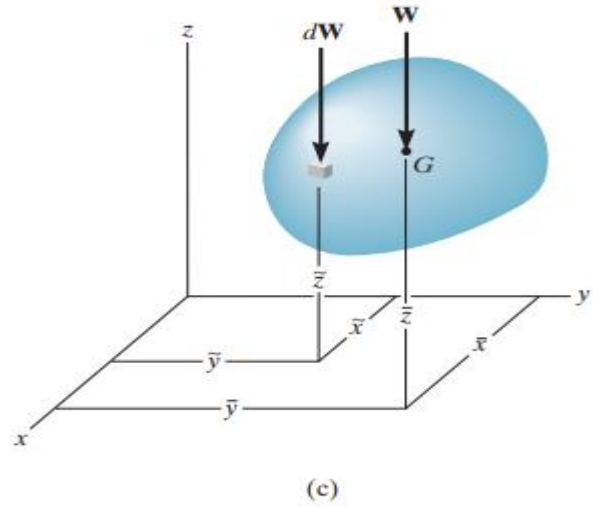
$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad \bar{x}W = \int \tilde{x} dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW}$$



أخيرا يمكن تعميم هذه النتيجة في الفراغ ثلاثي الأبعاد (الشكل c) وكتابة معادلات العزوم حول محاور الاحداثيات الثلاث ، من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة لأية محاور احداثيات

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$



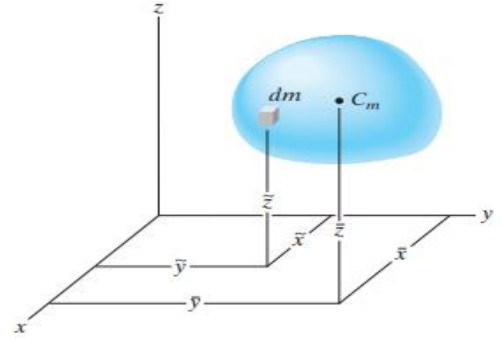
مركز الكتلة :

عند دراسة المسائل المتعلقة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى (علم الديناميك)، من الضروري تحديد نقطة تسمى " **مركز الكتلة** " بوضع علاقة الوزن والكتلة

$$dW = m \cdot g$$

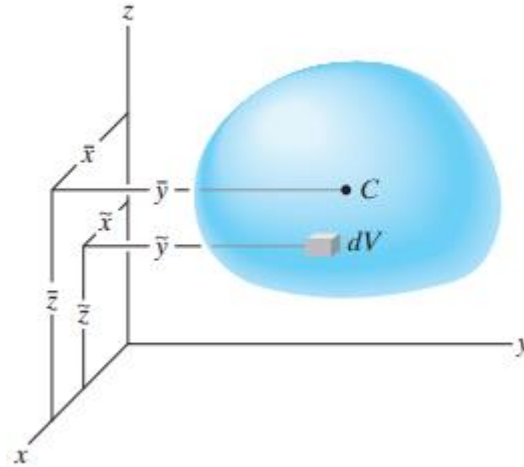
في المعادلة السابقة ينتج لدينا العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$



المركز الهندسي :

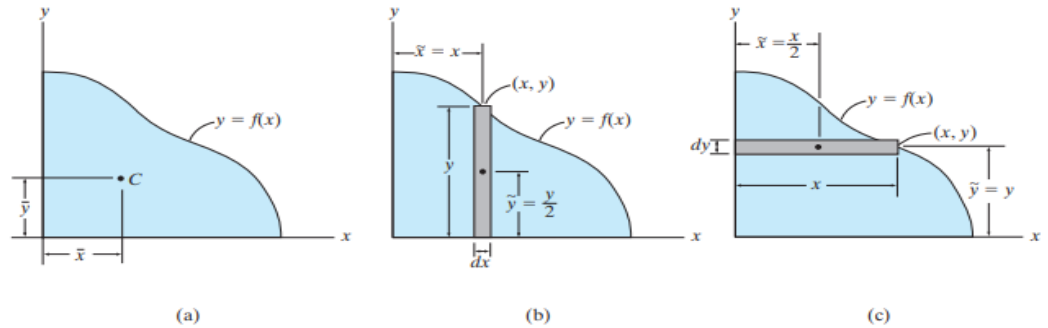
المركز الهندسي هو النقطة التي تعرف مركز الجسم ويعتمد على هندسية الجسم ونمير ثلاث حالات :
المركز الهندسي للحجم : عندما يتألف الجسم من مادة متجانسة ، تكون الكثافة ثابتة $dm = \rho dv$
نحصل على العلاقات التي تحدد المركز الهندسي للجسم :



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \quad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$

المركز الهندسي للمساحة :

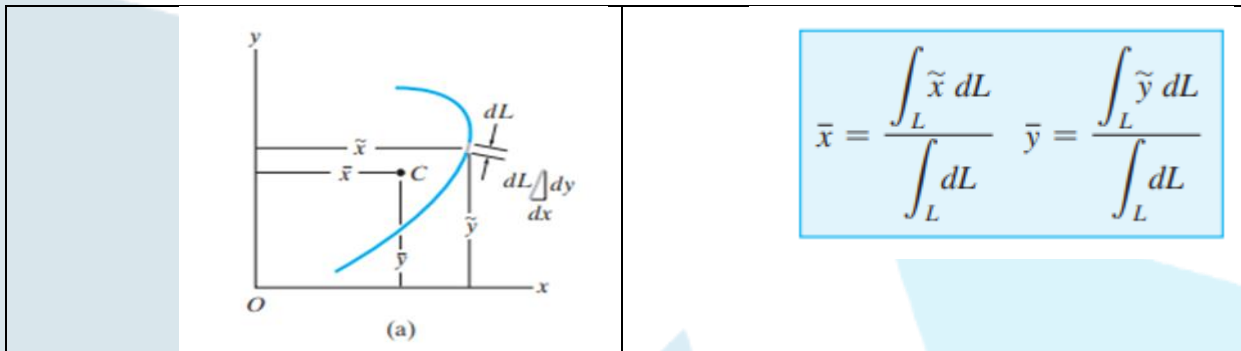
يتم تقسيم المساحة الى مساحات جزئية وحساب العزوم حول كافة محاور الاحداثيات



$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \quad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

الخط:

نعتبر عنصر التفاضل ونحسب العزوم حول محاور الاحداثيات.

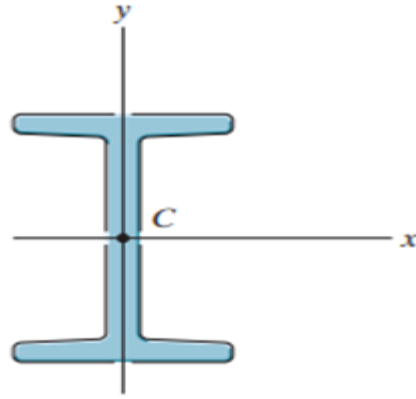


$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2} \quad dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy \quad = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

نقاط هامة :

- يمثل المركز الهندسي للجسم النقطة التي يتطابق فيها مركز الكتلة أو مركز الثقل عندما يكون الجسم متجانس .
- المعادلة المستخدمة لتحديد مركز الثقل أو المركز الهندسي عبارة عن موازنة معادلات العزوم لكافة الجسيمات التي يتألف منها الجسم ، وعزم المحصلة لنظام القوى .
- في بعض الحالات يقع المركز الهندسي للجسم خارج الجسم (من أجل حلقة مثلاً) .
- إذا كان الجسم يمتلك محورا تناظريا . فإن المركز الهندسي يقع على هذا المحور .



الأجسام المركبة :

من الممكن أن يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال (مستطيل ، مثلث ، نصف دائرة (...)، عندها نستطيع تقسيم الجسم إلى مجموعة من الأجسام وحساب المركز من أجل كل قسم، بدلا من حساب علاقات التكامل نستطيع استخدام العلاقات التالية :

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\sum W}$$

حيث :

\bar{x} ، \bar{y} ، \bar{z} احداثيات مركز الثقل للجسم المركب .

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ - احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .
 $\sum w$ - مجموع الأوزان الجزئية لكافة الأجزاء التي يتألف منها الجسم .

نظرية PAPPUS-GULDINUS:

تستخدم لحساب مساحة وحجم أي جسم دوراني وضعت النظريتين لأول مرة من قبل الرياضي "بابوس" في القرن الرابع ميلادي في الاسكندرية . وطوّرت من قبل الرياضي السويسري "غولدينوس" في القرن العاشر . واستخدمتا من أجل حساب مساحة السطح والحجم للأجسام الدورانية .

مساحة السطح :

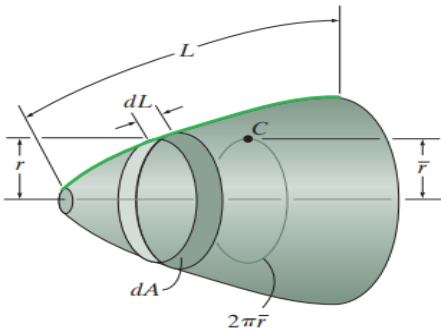
إذا قمنا بتدوير منحنى مستوي حول محور لا يتقاطع مع المنحنى ، فإن المنحنى سيشكّل سطح دوراني .
 مثلاً تتشكّل مساحة السطح المبين في الشكل عن طريق تدوير المنحنى بطول L حول المحور الأفقي .
 من أجل حساب مساحة السطح ، نفرض أولاً عنصراً تفاضلياً بطول dL .
 إذا قمنا بتدوير العنصر بزاوية 2π راديان حول المحور الأفقي .

مساحة الحلقة المتشكّلة : $dA = 2\pi \int \bar{r} \cdot dL$

$$A = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot L$$

إذا دار المنحنى بزاوية θ :

$$A = \theta \cdot \bar{r} \cdot L$$



مساحة السطح : مساحة السطح الدوراني تساوي : جداء منحنى التشكيل مع المسافة المقطوعة من قبل المركز الهندسي للمنحنى خلال تشكيل مساحة السطح.

$$A = \theta r . L$$

A - مساحة السطح الدوراني .

θ - زاوية الدوران مقاسة بالراديان .

r - المسافة العمودية من محور الدوران إلى مركز المنحنى المشكّل.

L - طول منحنى التشكيل .

الحجم : حجم الجسم الدوراني يساوي جداء مساحة التشكيل ، مع المسافة المقطوعة من قبل المركز الهندسي للمساحة خلال تشكيل الحجم.

$$V = \theta r . A$$

V - حجم الدوران .

θ - زاوية الدوران مقاسة بالراديان .

r - المسافة العمودية من محور الدوران إلى مركز مساحة التشكيل.

A - مساحة التشكيل .

الأشكال المركبة :

مساحة السطح الكلي أو الحجم المتشكل يساوي مساحات السطوح أو الأحجام المتشكلة من قبل كل جزء .

$$A = \theta \sum (r . L)$$

$$V = \theta \sum (r . A)$$

عزم العطالة (القصور الذاتي)

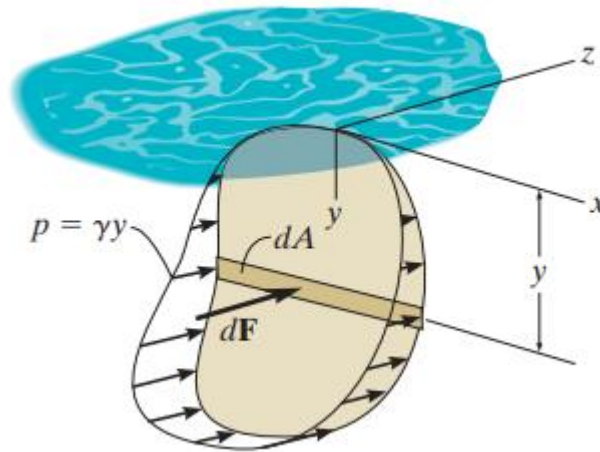
من أجل توضيح مفهوم عزم العطالة ، نفرض صفيحة مغمورة بالمياه معرضة لضغط P ، ويتغير الضغط خطياً حسب العمق حيث :

$$P = \gamma \cdot Y$$

γ - الوزن النوعي للماء

مقدار القوة المؤثرة على الصفيحة:

$$dF = P \cdot dA = (\gamma Y) \cdot dA$$



عزم هذه القوة حول المحور X:

$$dM = y \cdot dF = \gamma \cdot y^2 \cdot dA$$

تكامل dM من أجل كامل المساحة :

$$M = \gamma \int y^2 dA$$

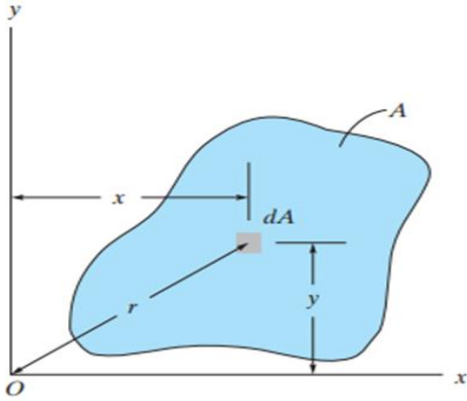
يسمى التكامل $\int y^2 dA$ بعزم العطالة للمساحة ، أو "عزم القصور الذاتي".

إن مصطلح "عزم العطالة للمساحة" لامتني فيزيائي له ، ولكنه مصطلح مستخدم بشكل أساسي في ميكانيك الموائع ، ومقاومة المواد ، والانشاءات الهندسية والتصميم الميكانيكي .

عزم العطالة :

يتم تحديد مركز الثقل للمساحة عن طريق العزم الأول للمساحة حول محور،
التكامل الثاني للعزم يمثل عزم القصور الذاتي للمساحة .
عزم العطالة من أجل عنصر المساحة حول المحاور x, y

$$I_x = y^2 \cdot dA, \quad dI_y = x^2 \cdot dA$$



من أجل كامل المساحة يتم تحديد عزم العطالة عن طريق علاقات التكامل :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

أيضا يمكننا كتابة العزم الثاني للمساحة حول القطب أو المحور، يسمى عزم العطالة القطبي ويستخدم
لحساب عزم الفتل في الأعمدة

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

r - المسافة العمودية من القطب (المحور) إلى عنصر المساحة

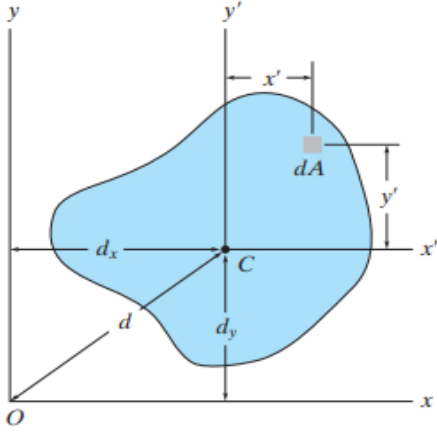
نظرية المحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتي للمساحة حول محور يساوي عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز الثقل +
المساحة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين . أي أن :

$$I_x = I_{x'} + Ad_y^2$$

$$I_y = I_{y'} + Ad_x^2$$

$$J_o = I_c + Ad^2$$



نصف قطر التدويم :

يستخدم عادة في تصميم الأعمدة في الانشاءات الميكانيكية ، بفرض أن المساحة وعزم القصور معروفين :

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} , \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

حساب عزم العطالة للمساحة عن طريق التكامل :

في معظم الحالات يمكن حساب عزم القصور عن طريق تكامل أحادي .

عندما يعطى المنحني المحدد للمساحة عن طريق تابع رياضي $y=f(x)$ ،

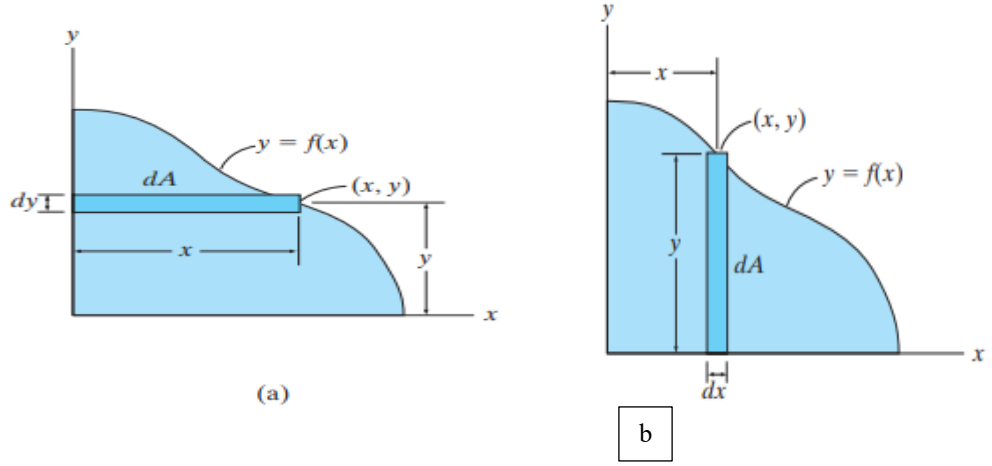
عندها يتم اختيار عنصر تفاضلي للمساحة بطول محدد وعرض تفاضلي .

عادة يمكن اختيار طول العنصر بشكل مواز للمحور المراد حساب عزم العطالة عنده ، من أجل

الشكل (a) حيث يراد حساب العزم حول المحور x يمتلك العنصر سماكة dy ، عندها يكون

لكافة أجزاء العنصر نفس الذراع y بالنسبة للمحور x .

من أجل الشكل (b) يقع العنصر التفاضلي على نفس المسافة x بالنسبة للمحور y .



عزم عطالة الكتلة :

خاصية للجسم تقيس مقاومة الجسم للتسارع الزاوي ، تستخدم في علم الديناميك من أجل دراسة الحركة الدورانية .

نعرف عزم القصور الذاتي للجسم حول محور Z طريق العلاقة

$$I = \int_m r^2 dm$$

الواحدات: $kg.m^2$

إذا كان الجسم الصلب يمتلك قيمة مختلفة للكثافة عندها يمكن التعبير عن عنصر الكتلة وفق

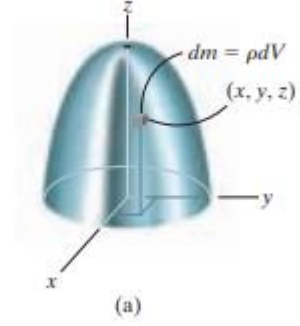
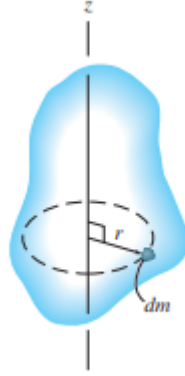
$$dm = \rho dv$$

قيم الكثافة للحجم

$$I = \int_v r^2 \rho . dv$$

من أجل قيم ثابتة للكثافة :

$$I = \rho \int_v r^2 dv$$



نظرية المحاور المتوازية :

عندما يكون عزم القصور الذاتي لجسم حول محور يمر بمركز الكتلة معروفا ، عندها يمكننا حساب عزم القصور الذاتي للجسم حول أي محور آخر موازيا للمحور السابق .
عزم القصور الذاتي للكتلة حول محوري ساوي عزم القصور حول محور يمر بمركز الثقل مضافا إليه الكتلة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين

$$I = I_G + md^2$$

I - عزم العطالة للكتلة حول محور ما

عزم العطالة للكتلة حول محور يمر بمركز الثقل. I_G

- كتلة الجسم m

- المسافة بين المحورين d .

الأجسام المركبة :

من أجل حساب عزم القصور الذاتي لجسم مؤلف من عدد من الأجسام البسيطة حول محور، نقوم بحساب الجمع الجبري لعزوم القصور لكل جزء حول نفس المحور.