التوزيعات الاحتمالية المستمرة

التوزيع الأسي Exponential Distribution

هو توزيع احتمالي مستمر يستخدم كثيرا في علم الحاسوب، خاصة في نمذجة أوقات الانتظار أو الفواصل الزمنية بين الأحداث

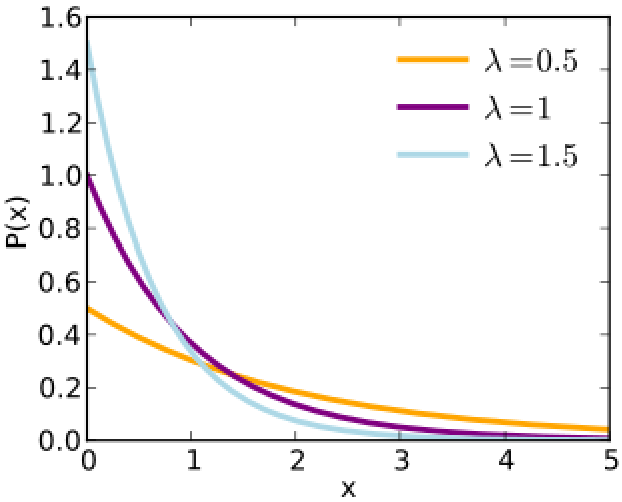
تعريف دالة الكثافة الاحتمالية

نقول أن المتحول العشوائي X يخضع لتوزيع أسي اذا كان تابع كثافته من الشكل

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad ; \quad \forall x \geq 0$$ و λ مقدار ثابت موجب

و له الشكل البياني التالي

تابع الكثافة الاحتمالي



واضح أن :

a) $f(x) \geq 0$

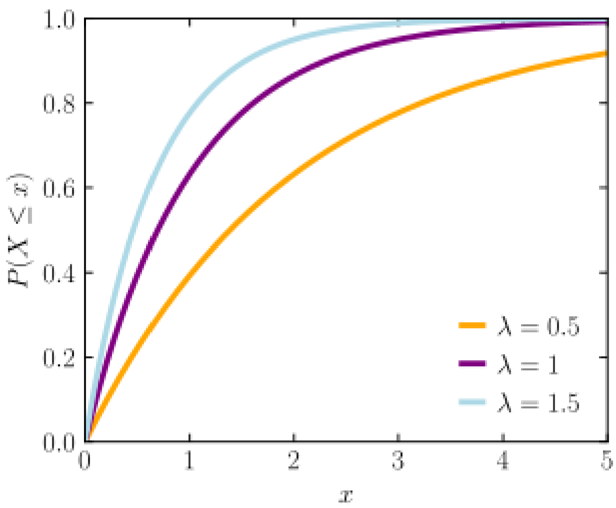
b) و يحقق $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

للتحقق من ذلك $\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx = -[e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = 1$

تابع التوزيع $F(x)$

له الشكل البياني التالي

تابع التوزيع التراكمي



$$F(x) = P[X \leq x] = \int_0^x f(x)dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

القيم المميزة للتوزيع الأسي

- $\alpha_i = E[X^i] = \int_0^\infty x^i f(x)dx = \lambda \int_0^\infty x^i e^{-\lambda x} dx$

بإيجاد التكامل نجد أن

$$\alpha_i = \frac{i!}{\lambda^i}$$

- $i = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$
- $i = 1 \Rightarrow \alpha_1 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $i = 2 \Rightarrow \alpha_2 = E[X^2] \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{\lambda^2}$

$$\Rightarrow \mu_2 = \sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

- $i = 3 \Rightarrow \alpha_3 = E[X^3] \Rightarrow \alpha_3 = \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$

$$\Rightarrow \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{2/_{\lambda^3}}{1/_{\lambda^3}} \Rightarrow \gamma = 2 > 0$$

التوزيع الأسي دوما غير متناظر و منحاز نحو اليمين

التابع المولد للعزوم: $\Psi_X(t)$:

$$\Psi_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_0^{\infty} e^{xt} f(x)dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda t} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)} dx =$$

$$\Rightarrow \Psi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

و منه يمكن الحصول على العزوم (الابتدائية و المركزية) السابقة باستخدام

$$\alpha_i = \Psi(t)_X^i \Big|_{t=0}$$

مثال

اذا كانت الفترة الزمنية لانهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط دقيقتين أوجد:

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لانهاء خدمة العميل

2- ما احتمال انهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحل

1) **لدينا** $\frac{1}{\lambda} = 2 \Leftarrow \lambda = \frac{1}{2} = 0.5$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \forall x \geq 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 0.5 e^{-0.5x}; \forall x \geq 0$$

2) $$P[X<1]=F(1)=1-e^{-0.5(1)}$$
$$=0.3935$$

مثال

متوسط عمر جهاز كمبيوتر يتبع لتوزيع أسي بمتوسط أربع سنوات

1- ما احتمال أن يعمل الجهاز أكثرمن ست سنوات

2- أوجد الانحراف المعياري و التابع المولد للعزوم

الحل:

$$1/\lambda=4\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{تابع الكثافة}}f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x};\ \forall x\geq 0$$

$$1)\ P[X>6]=1-P[X\leq 6]=1-F(6)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{4}(6)}\right)$$

$$P[X>6]=e^{-6/4}=e^{-1.5}=0.223$$

اذا الاحتمال حوالي 22.3%

$$2)\ \sigma_X^2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=16\Rightarrow\sigma=4$$

$$\Psi_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}=\frac{1/4}{1/4-t}$$

مثال

متحول عشوائي مستمر تابع كثافته

$$f(x)=\frac{c}{e^{5x}}\qquad;\forall x\geq 0$$

المطلوب :

1- أوجد قيمة c ليكون $f(x)$ تابع كثافة.

2- أوجد تابع التوزيع و التابع المولد للعزوم.

3- أوجد العزوم الابتدائية والعزوم المركزية الأربعة الأولى. وأوجدعامل التناظر

4- اذا كان $Y = 3X - 7$ أوجد توقع Y و تشتته؟

الحل:

1. نلاحظ أن $f(x)$ تابع كثافة للتوزيع الأسي من الشكل

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ ; \forall x \geq 0$ و لدينا $f(x) = ce^{-5x}$

نستنتج أن $c = 5$

2. تابع التوزيع و التابع المولد للعزوم يعطيان بالشكل

$$F(x) = 1 - e^{-cx} = 1 - e^{-5x}$$

$$\Psi_X(t) = \frac{c}{c-t} = \frac{4}{4-t}$$

3. العزوم الابتدائية من المرتبة i في التوزيع الأسي تعطى بالعلاقة

$$\alpha_i = \frac{i!}{c^i}$$

و منها نحصل على العزوم الابتدائية الأربعة الأولى

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{5}, \qquad \alpha_2 = \frac{2}{25}, \qquad \alpha_3 = \frac{3!}{5^3} = \frac{6}{5^3} = \frac{6}{125}$$

أما العزوم المركزية الأربعة الأولى فهي

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{25}$$

أما العزم المركزي الرابع وهوالعزم المركزي من المرتبة الثالثة فيعطى بالعلاقة

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = \frac{6}{125} - 3(\frac{1}{5})\left(\frac{2}{25}\right) + 2(\frac{1}{5})^3$$

$$\Rightarrow \mu_3 = \frac{2}{125} = \frac{2}{(5)^3}$$

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3}; \qquad \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \sigma_X^3 = \frac{1}{125} \Rightarrow$$

$$\gamma = 2 > 0$$

غير متناظر و منحاز نحو اليمين دوما.

4. لدينا $Y = 3X - 7$

$$\Rightarrow E[Y] = 3E[X] - 7 = 3\left(\frac{1}{5}\right) - 7 \qquad ; E[X] = \alpha_1$$

$$\sigma_Y^2 = (3)^2\sigma_X^2 = (3)^2\left(\frac{1}{25}\right) \qquad ; \sigma_X^2 = \mu_2$$

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

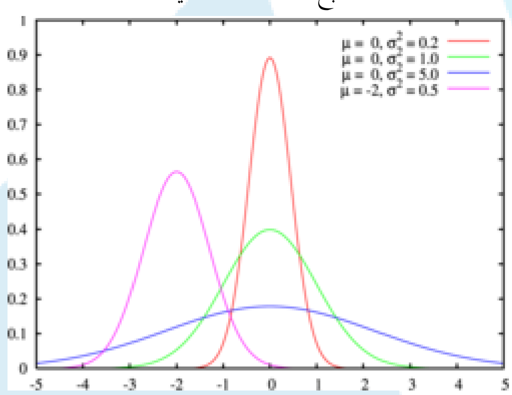
يعتبر التوزيع الطبيعي من الأعمدة الأساسية في الإحصاء و من أهم التوزيعات المستمرة، و ذلك لأن كثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. كما أن كثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع يمكن أن يقرب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

تعريف نقول أن المتحول العشوائي X يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط m_X و انحراف معياري σ_X اذا كان تابع كثافته يعطى بالشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} \qquad ; \forall x \epsilon R$$

اختصارا نكتب $X: N(m, \sigma)$ و تعني أن المتحول X يخضع لتووزيع طبيعي بالوسيطين σ, m و بيانه يأخذ شكل جرس متماثل حول m_X

تابع الكثافة الاحتمالية

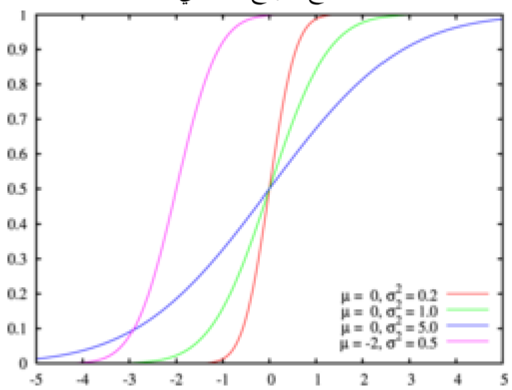


- و هو متناظر دوما بالنسبة لتوقعه (المتوسط) ، أي دوما $\gamma = 0$ أي $(\mu_3 = 0)$
- **تابع توزيعه يعطى بالعلاقة:**

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} \qquad ; \forall x \epsilon R$$

وشكله البياني

تابع التوزيع التراكمي



التابع المولد للعزوم يعطى بالعلاقة

$$\Psi_X(t) = E[e^{Xt}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

نفرض أن: $\frac{x-m}{\sigma} = y \Rightarrow dx = \sigma dy$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Psi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y+m)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{mt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma m - \frac{y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{mt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[(y-t\sigma)^2 + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2]} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{mt} e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-t\sigma)^2} dy
\end{aligned}$$

اذا فرضنا $y - t\sigma = z$ فان قيمة التكامل تساوي $\sqrt{2\pi}$ و بالتالي

$$\boldsymbol{\Psi_X(t) = e^{mt+\frac{\sigma^2}{2}t^2}}$$

كل متحول له التابع المولد للعزوم هذا، نقول أنه يخضع للتوزيع الطبيعي.

حالة خاصة

اذا كان $Z: N(0,1)$ فاننا نرمز لتابع كثافته بالرمز $\varphi(z)$ و لتابع توزيعه بالرمز $\phi(x)$ و يكون

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad ; \forall z \epsilon R$$

$$\phi(z) = P[Z \leq z] \Rightarrow \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

و هناك جداول خاصة يمكن منها حساب $\phi(z)$ ،علما أن

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

- $\boldsymbol{Z: N(0,1)}$ نقول أن Z يخضع لتوزيع طبيعي معياري

مثلا لايجاد $\phi(3.18)$

ننظر في جدول القيم الموجبة للتوزيع الطبيعي المعياري في العمود تحت الرمز z حتى نحصل للسطر 3.1 ثم ننتقل أفقيا حتى نصل للقيمة التي تقع في العمود تحت 0.08 فتكون هي النتيجة المطلوبة

$$\emptyset(3.18) = 0.9993$$

$$* \; P[Z \leq 0] = \emptyset(0) = 0.5$$

$$* \; P[Z = z] = 0$$

$$* \; P[Z > z] = 1 - P[Z \leq z] = 1 - \emptyset(z)$$

ملاحظة :

إذا كان $X: N(m, \sigma)$ و كان $Y = aX + b$

فإن المتحول العشوائي المستمر Y يخضع لتوزيع طبيعي

$$Y: N(am+b, |a|\sigma)$$

ملاحظة :

العلاقة بين تابع التوزيع $F(x)$ حيث $X: N(m, \sigma)$

وبين تابع التوزيع $\emptyset(z)$ حيث $Z: N(0,1)$

$$X: N(m, \sigma) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

من أجل

$$\frac{x-m}{\sigma} = z \Rightarrow x = \sigma z + m \Rightarrow dx = \sigma\, dz$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \emptyset\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \emptyset\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \emptyset(z) \; ; \; z = \frac{x-m}{\sigma}$$

■عندما نخضع في أي مسألة لتابع توزيع طبيعي تابع توزيعه $F(x)$ فاننا نقوم بتحويله الى توزيع طبيعي معياري تابع توزيعه $\emptyset(z)$ وفق العلاقة

$$F(x) = \emptyset\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \emptyset(z)$$

أي عندما يكون:

$$\mathrm{X: N(m, \sigma)} \Leftrightarrow Z = \frac{x-m}{\sigma} \;:\; N(0,1)$$

$$F(x) \Leftrightarrow \emptyset(z)$$

ملاحظة :

اذا كانت $X_1, X_2, \ldots., X_n$ متحولات عشوائية مستقلة

و كان $X_i: N(m_i, \sigma_i)$ حيث $i = 1, n$

و كان $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ فان

$$X: N\left(\sum_{i} m_i , \sqrt{\sum_{i} \sigma_i^2}\right)$$

مثال

ليكن $X_1: N(0,1)$ ، $X_2: N(-1,1)$ ، $X_3: N(-2,1)$

متحولات عشوائية مستقلة

وليكن $X = X_1 + 2X_2 - 2X_3$

و المطلوب: عين تابع كثافة X و احسب P[X>0]

الحل:

نكتب $X = X_1 + 2X_2 - 2X_3$ بالشكل

$$X = X_1 + Y + Z$$

و ذلك بفرض

$$Y = 2X_2, \qquad Z = -2X_3$$

$$Y = 2X_2 \rightarrow E[Y] = 2E[X_2] = 2(-1) = -2$$
$$Y = 2X_2 \rightarrow \sigma_Y^2 = (2)^2\sigma_{X_2}^2 = 4 \Rightarrow \sigma_Y = 2$$
$$\Rightarrow \quad Y: N(-2,2)$$

$$Z = -2X_3 \rightarrow E[Z] = -2E[X_3] = -2(-2) = 4$$
$$Z = -2X_3 \rightarrow \sigma_Z^2 = (-2)^2\sigma_{X_3}^2 = 4 \Rightarrow \sigma_Z = 2$$
$$\Rightarrow \quad Z: N(4,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow X: N\left(\sum_i m_i\,,\sqrt{\sum_i \sigma_i^2}\right)\\ \sum_i m_i = 0-2+4=2\\ \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}=\sqrt{1+4+4}=3\end{array}\right\} \Rightarrow \qquad X: N(2,3)$$

و منه تابع كثافة المتحول X يكون بالشكل

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^2} \qquad ;\forall x \epsilon R$$

$$P[X>0]=1-P[X\leq 0]=1-F(0)=1-\emptyset\left(\frac{0-m}{\sigma}\right)$$
$$=1-\emptyset\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\emptyset\left(\frac{2}{3}\right)=0.4754$$

مثال

ليكن X متحول عشوائي تابع كثافته

$$f(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

وليكن $Y=1-3X^2+4X^3$ و المطلوب أوجد $E[Y]$ ؟

الحل

من المعطيات نلاحظ أن تابع الكثافة المعطى هو لمتحول X يخضع لتوزيع طبيعي أي

$$X: N(m,\sigma) \Rightarrow X: N(0,a); m_x=0,\ \ \sigma=a$$

ومنه

$$E[Y] = 1 - 3E[X^2] + 4E[X^3]$$

لدينا $\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \Leftarrow \sigma^2 = a^2 \Leftarrow \sigma = a$

$$a^2 = E[X^2] - 0 \Rightarrow \; E[X^2] = a^2$$

$\mu_3 = 0 \quad \Leftarrow \gamma = 0$ أي أنه دوما متناظر $X: N(m, \sigma)$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= E[X^3] \\ \alpha_2 &= E[X^2] = a^2 \\ \alpha_1 &= E[X] = 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{بالتعويض } \mu_3=0} 0 = E[X^3] - 3(0)(a^2) + 2(0)$$

$$\Rightarrow E[X^3] = 0$$

نعوض في $E[Y]$ فنحصل على $E[Y] = 1 - 3a^2$

مثال

لنفرض أن مستوى هيموغلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 و انحراف 0.9

إذا اخترنا أحد الأشخاص بشكل عشوائي فما هو

1. احتمال أن يكون مستوى هيموغلوبين الدم أكبر من 14
2. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموغلوبين الدم لديهم من أكبر من 14
3. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموغلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18

الحل

ليكن X: مستوى هيموغلوبين الدم

المعطيات: $m = 16 \quad , \sigma = 0.9$

$$X: N(m, \sigma) \rightarrow X: N(16, 0.9)$$

1. $P[X > 14] = 1 - P[X < 14] = 1 - F(14)$

$$= 1 - \emptyset\left(\frac{14-16}{0.9}\right)$$
$$= 1 - \emptyset(-2.22) = \emptyset(2.22)$$
$$= 0.9868$$

2 . نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموغلوبين الدم لديهم أكبر من 1هي

$$P[X > 14] * 100 = 0.9868 = 98.68\ \%$$

3 .

$$P[14 < X < 18] = F(18) - F(14)$$
$$= \emptyset\left(\frac{18-16}{0.9}\right) - \emptyset\left(\frac{14-16}{0.9}\right)$$
$$= \emptyset(2.22) - \emptyset(-2.22)$$
$$= \emptyset(2.22) - \big(1 - \emptyset(2.22)\big)$$
$$= 0.9736$$

و عليه نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموغلوبين الدم لديهم أكبر من 14إلى 18 هي 97.36%

مثال

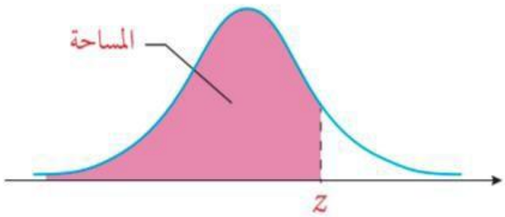
زمن استجابة خادم في شبكة يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 200 مللي ثانية و انحراف معياري 20 مللي ثانية، ما احتمال أن يكون زمن الاستجابة أقل من 230 مللي ثانية؟

الحل

$P[X < 230]$=F (230)

$$= \emptyset\left(\frac{230-200}{20}\right) = \emptyset(1.5) = 0.9332$$

إذا نسبة الاحتمال حوالي 93.32%



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998