بيانيات حاسوبية

د. غيث ابراهيم بلال

المحاضرة التاسعة

الانعكاس المرآتي حول المحاور:

إذا اعتبرنا ان المحور ox او المحور oy بمثابة مرآة يصبح للكائن صورة مرآتية او انعكاس وبالتالي انعكاس النقطة p هو `p التي توجد على نفس المسافة من p .

اذن تحويل الانعكاس المرآتي M_x بالنسبة للمحور ox يحدد وفق التالي:

$$p` = M_x . p$$

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, p` = \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}, M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نكتب وفق الاحداثيات المتجانسة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x` = x \\ y` = -y \end{matrix}}$$

اما بالنسبة للانعكاس حول oy يكتب بالشكل التالي:

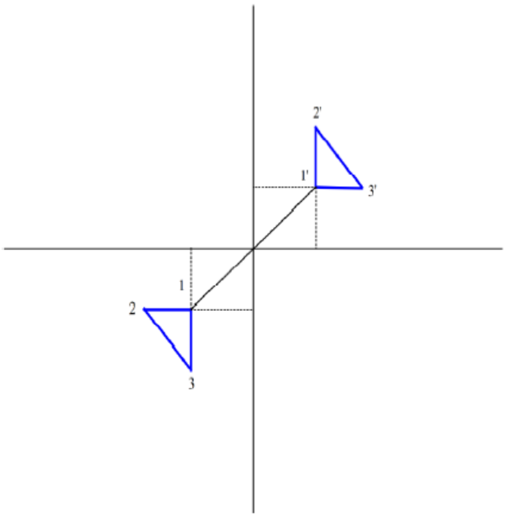
$$p` = M_y . p$$

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x` = -x \\ y` = y \end{matrix}}$$

ملاحظة مهمة:

كما نلاحظ ان $M_x = S_{1,-1}$ وان $M_y = S_{-1,1}$ أي أن تحويل الانعكاس المرآتي حول المحاور هو حالة خاصة من تغيير الحجم (او التقييس).

الانعكاس المرآتي حول أو بالنسبة إلى مركز الاحداثيات:



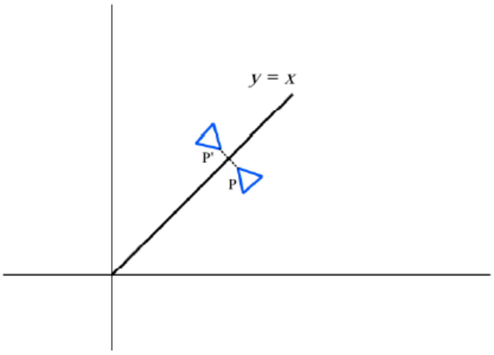
$$p` = Mo.p \qquad p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; p` = \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$Mo = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي حسب الاحداثيات المتجانسة نكتب:

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

الانعكاس المرآتي حول محور او مستقيم معادلته $y = x$ يمر من مبدأ الاحداثيات:



$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, p` = \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الاحداثيات المتجانسة:

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

نبدل كل x ب y وكل y ب x.

الانعكاس المرآتي حول محور او مستقيم $y = -x$ يمر من مبدأ الاحداثيات:

$$P` = M.p$$

$$\begin{bmatrix} x` \\ y` \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x` = -y \\ y` = -x \end{matrix}}$$

نبدل كل x ب ‎-y وكل y ب ‎-x.

الانعكاس بالنسبة لمستقيم معادلته $y = mx + b$:

للقيام بذلك نتبع الخطوات التالية:

1. يزاح المستقيم حتى يمر من مركز الاحداثيات.

(هنا او تزاح النقطة b نقطة التقاطع إلى نقطة الأصل).

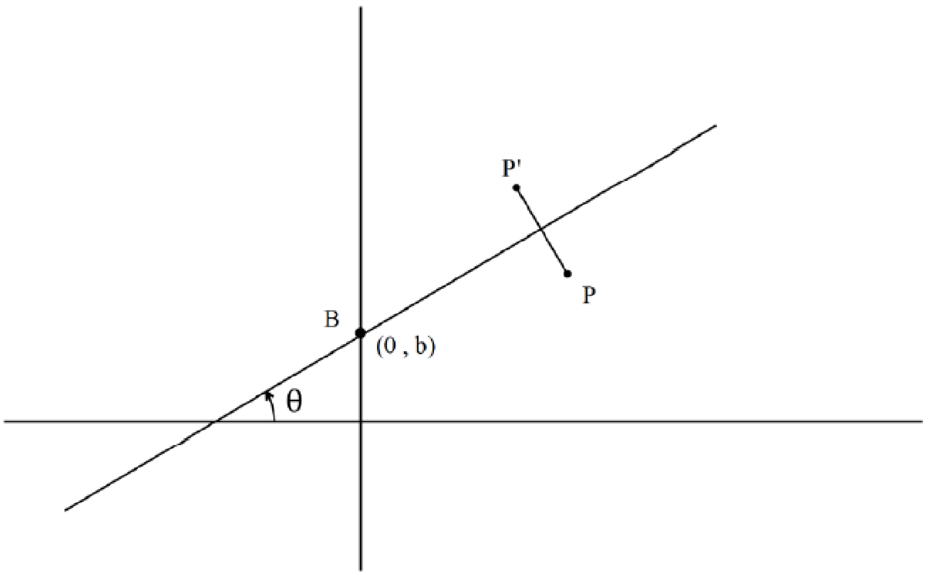
2. دوران بمقدار $-\theta$ بحيث ينطبق المستقيم مع أحد المحاور.

3. يحسب الانعكاس بالنسبة للمحور.

4. يعاد تدوير المستقيم بالاتجاه المعاكس.

5. يزاح المستقيم إلى مكانه الأصلي.

(او تنقل b مجدداً إلى الموقع (0,b))



مصفوفة التحويل تعطى بالشكل والترتيب:

$$ML = T . R_{\theta} . M_{x} . R - \theta . T^{-1}$$

حيث:

R_{θ} دوران T إزاحة

M_{x} انعكاس حول أحد المحاور وهو هنا ox

$R - \theta$ دوران سالب T^{-1} انعكاس ازاحة

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: هنا يمكن أن نكتب:

$$ML = T . R_{\theta} . M_{y} . R - \theta . T^{-1}$$

بالنسبة إلى الزاوية θ والمحور oy

تركيب التحويلات الهندسية:

هو التحويلات الناتجة عن تتالي تحويلات يتم تمثيلها كنتيجة جداء التحويلات الهندسية المفردة وبالاستفادة من خصائص المصفوفات.

الازاحة المركبة في جملة ثنائية الأبعاد:

لنقل النقطة p من الموقع الجديد `p إلى ``p يتم بالشكل التالي:

$$p` = T(\Delta x_1, \Delta y_1)p \quad , \quad p`` = T(\Delta x_2, \Delta y_2)\mathrm{p}`$$

نبدل فنحصل على:

$$p`` = T(\Delta x_2, \Delta y_2).T(\Delta x_1, \Delta y_1)\mathrm{p}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} + t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{1y} + t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & \Delta y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 + \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta y_2 + \Delta y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=T\,(T_{1x}+T_{2x}\,,t_1y+t_2y\,).P$$

ان انتقال النقطة من الموقع p إلى `p ثم إلى الموقع الجديد ``p يوافق دمج مصفوفتي الازاحة عبر جمع قيمتي الازاحة في مصفوفة واحدة.

تركيب الدوران:

نكتب

$$\mathrm{P`}=R\,\theta P\ \ ,\ P``=R\,\varphi P`$$

بالاعتماد على المصفوفات نكتب:

$$\mathrm{P``}=\mathrm{R}\,\theta.R\,\varphi.P$$

$$P``=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) & 0 \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=R(\theta+\varphi).\mathrm{P}$$

اذن نستنتج أن دمج مصفوفتي الدوران تم عبر جمع زاويتي الدوران.

تركيب التقييس:

التقييسات المركبة في جملة ثنائية الابعاد:

لتركيب التقييس في الموقع p إلى كل من `p و ``p بالتالي يتم بالشكل المصفوفي كما يلي:

$$\mathrm{P}` = \mathrm{S}_1 P \ , \ P`` = S_2 P` \qquad P`` = S_1 S_2 . P$$

$$P`` = \begin{bmatrix} S_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{1x} .S_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & S_{1y} .S_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= S\,(S_{1x} .S_{2x} , S_{1y} .S_{2y}).P$$

نلاحظ ان دمج مصفوفتي التقييس يتم عبر ضرب قيمتي التقييس الجديدتين.

التحويلات الهندسية حول جملة احداثيات الكائن (او حول نقطة مركزية ليست مركز الاحداثيات):

ان كل ما سبق كان عبارة عن تدوير او تقييس او إزاحة حول جملة احداثيات العامة لكن ماذا لو أردنا تدوير الكائن حول جملة احداثيات او أردنا تغير حجمه بالنسبة لها.(هنا نتخلص من مشكلة إزاحة الشكل من مكانه عند تغيير حجمه).

ويمكننا القيام بذلك عن طريق تنفيذ الخطوات التالية:

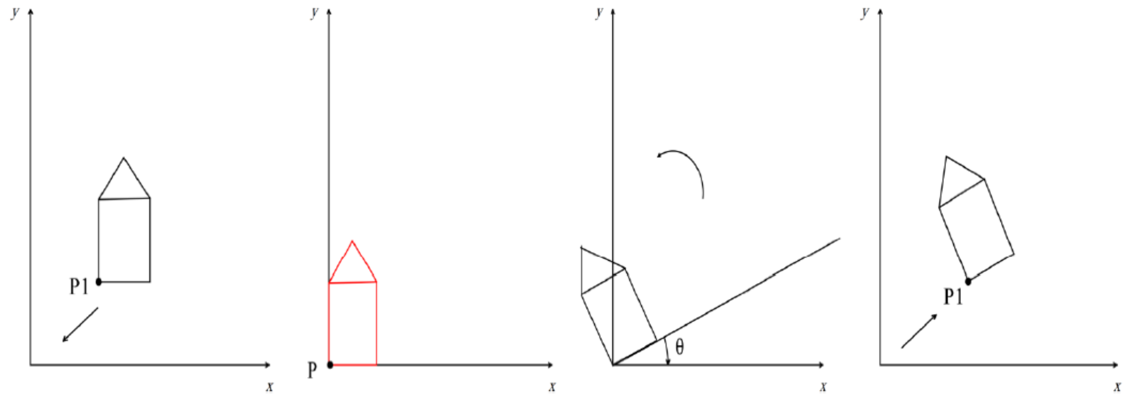
1. إزاحة الشكل إلى جملة الاحداثيات الأساسية.

(بحيث ينطبق مركز التدوير على مركز الاحداثيات).

2. ثم نطبق التحويلات المناسبة (تدوير او تقييس).

3. نعود بالشكل عبر ازاحته من جديد إلى الموقع الأصلي.

مثال:



التدوير حول نقطة $P(x,y)$ من الكائن:

يتم ذلك باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$R\theta_1 P = T . R\theta . T^{-1}$$

$$R\theta_1 P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & [-x\cos\theta + y\sin\theta + x] \\ \sin\theta & \cos\theta & [-x\sin\theta - y\cos\theta + y] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x(1-\cos\theta) + y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y(1-\cos\theta) - x\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هنا نحتاج إلى احداثيات النقطة التي يتم التدوير حولها بالإضافة إلى زاوية الدوران فقط.

التقييس بالنسبة لنقطة ثابتة $P(x,y)$ من الكائن:

باستخدام المصفوفات نكتب:

$$S_{x,y,P} = T . S_{x,y} . T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_x & 0 & x \\ 0 & S_y & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_x & 0 & -xS_x + x \\ 0 & S_y & -yS_y + y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تطبيق:

كبر المثلث الذي رؤوسه $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$ إلى ضعف حجمه مع تثبيت $C(5,2)$

اذن تطبيق مباشر:

$$S_{2,2,C} = T . S_{2,2} T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

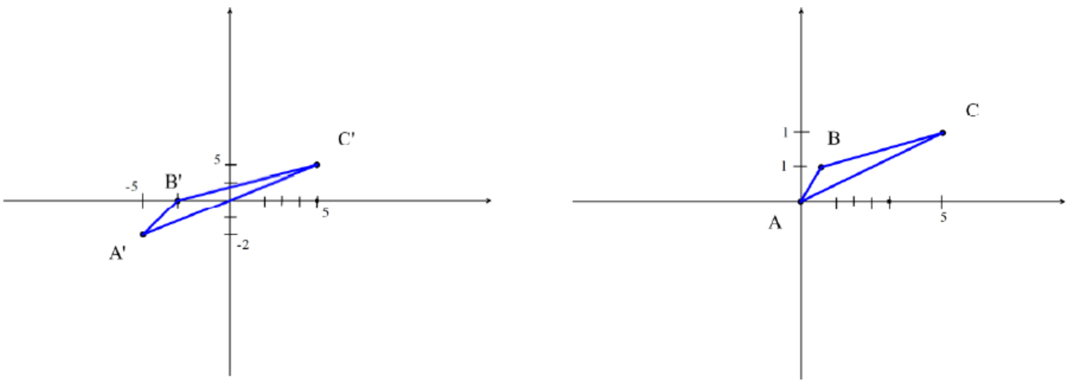
$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الآن نأخذ نقط $P\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ نكتب:

$$S_{2,2,C} . A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} A`$$

$$S_{2,2,C} . B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} B`$$

$$S_{2,2,C}.C=\begin{bmatrix}2&0&-5\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}C`$$



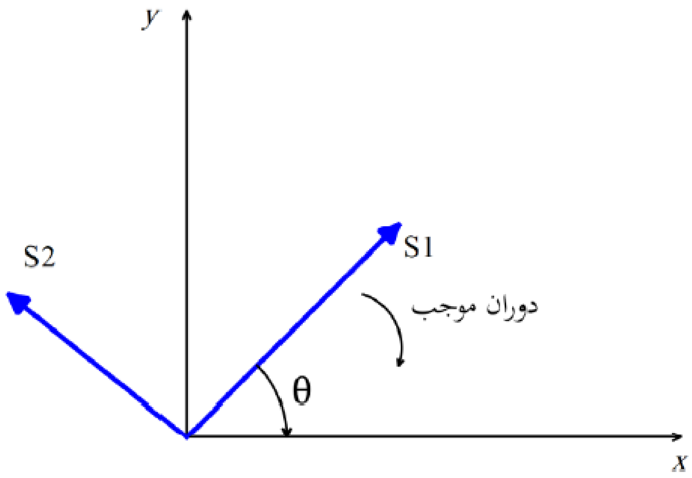
الشكل العام لاتجاهات التقييس في جملة ثنائية الأبعاد:

ليس من الضروري ان يكون اتجاه التقييس هو دائماً باتجاه المحورين الاحداثيين.

لنفرض ان التقييس يتم بالنسبة لجملة جديدة كما يوضحها الشكل التالي:

هنا نقوم بالخطوات التالية:

1. نستطيع تدوير الكائن ليطابق (ليحاذي) الجملة الجديدة.
2. نطبق عليه التقييس المناسب في الجملة الجديدة.



او :

1. ندور الجملة الجديدة لتتطابق مع الجملة الاحداثية.

2. نطبق تحويل التقييس.

3. نطبق تدويراً معاكساً لإعادة النقاط إلى موضعها الأصلي.

والتحويل المركب يكتب كما يلي:

$$R^{-1}\theta = R.\theta S(s_x, s_y)R\theta_1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s_x\cos^2\theta+s_y\sin^2\theta & (s_y-s_x)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ (s_y-s_x)\cos\theta\sin\theta & s_x\sin^2\theta+s_y\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هنا تمت المناقشة في جملة احداثية للتقييس متمركزة في مبدأ الاحداثيات.

أما إذا كان هنالك إزاحة يجب ان ندخل عامل الازاحة.

إزاحة دوران معاكس.

تقييس دوران إزاحة.