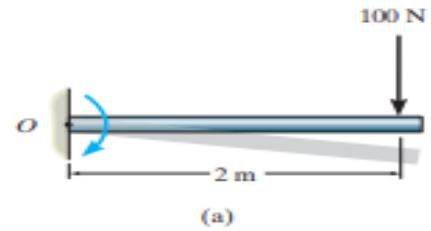
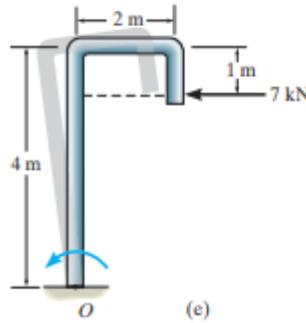
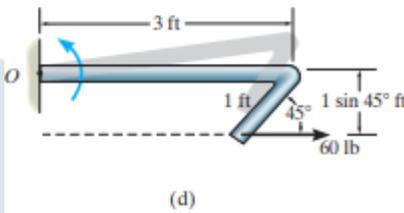
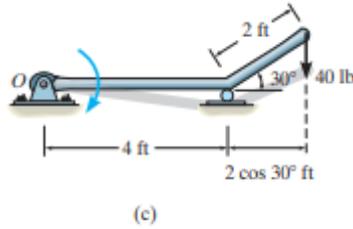
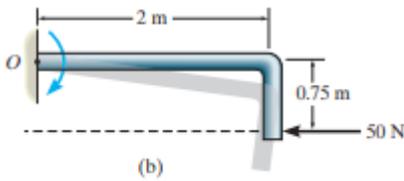


## الجلسة الرابعة: عزم القوة – الإرجاع إلى محصلة قوة وحيدة وعزم مزدوجة .

د.نزار عبد الرحمن

مسألة (1) : من أجل الأشكال المبينة احسب عزم القوة حول النقطة O



$$a \quad M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

$$b \quad M_O = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

$$c \quad M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ ft} + 2 \cos 30^\circ \text{ ft}) = 229 \text{ lb} \cdot \text{ft} \curvearrowright$$

$$d \quad M_O = (60 \text{ lb})(1 \sin 45^\circ \text{ ft}) = 42.4 \text{ lb} \cdot \text{ft} \curvearrowright$$

$$e \quad M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

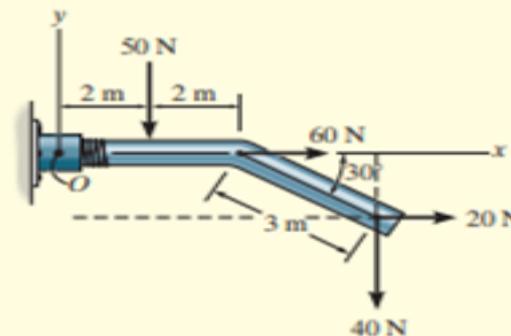
مسألة (2) : احسب عزم محصلة القوى المؤثرة على الجائز.

$$\zeta + (M_R)_o = \sum Fd;$$

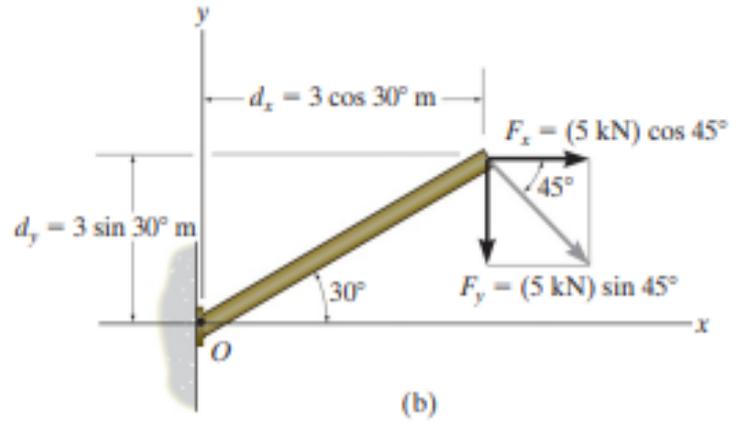
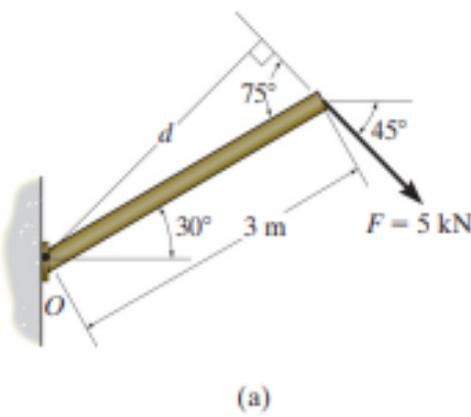
$$(M_R)_o = -50 \text{ N}(2 \text{ m}) + 60 \text{ N}(0) + 20 \text{ N}(3 \sin 30^\circ \text{ m})$$

$$-40 \text{ N}(4 \text{ m} + 3 \cos 30^\circ \text{ m})$$

$$(M_R)_o = -334 \text{ N}\cdot\text{m} = 334 \text{ N}\cdot\text{m}$$



مسألة (3) : احسب عزم القوة حول النقطة O



الحل الأول : نحسب الذراع d من الشكل الهندسي :

$$d = (3\text{m})\sin 75 = 2.898 \text{ m}$$

$$M_0 = F \cdot d = -5\text{KN}(2.898) = -14.5\text{KN}\cdot\text{m}$$

الحل الثاني : نحلل القوة إلى مركبتين متعامدتين ونحسب شدة العزم لكل مركبة حول النقطة o.

$$M_0 = -F_x d_y - F_y d_x$$

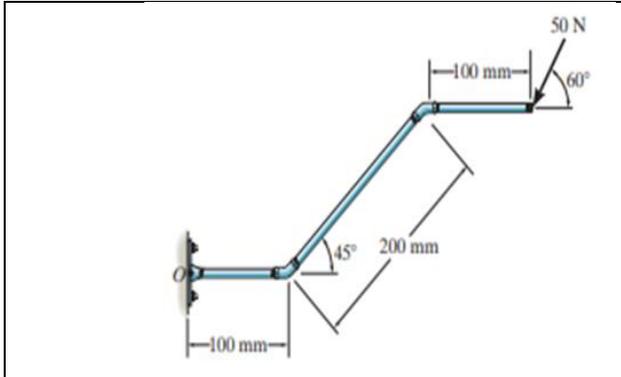
$$-(5\cos 45)(3\sin 30) - (5\sin 45)(3\cos 30) = -14.5 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

الحل الثالث : نختار محاور جديدة x-y على استقامة الجسم ، ومتعامدة معه .

هنا تكون شدة المركبة FX مساويا للصفر ، يبقى حساب عزم المركبة FY.

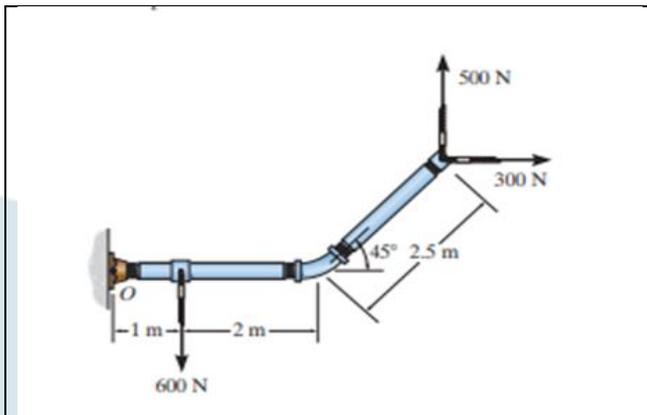
$$M_0 = -F_y d_x = -(5\sin 75)(3\text{m}) = -14.5\text{KN}\cdot\text{m}$$

مسألة (4): احسب عزم القوة حول النقطة O



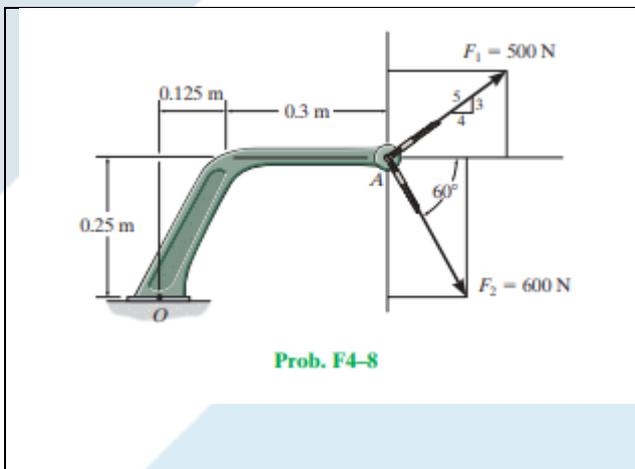
$$\begin{aligned} \zeta + M_O &= 50 \sin 60^\circ (0.1 + 0.2 \cos 45^\circ + 0.1) \\ &\quad - 50 \cos 60^\circ (0.2 \sin 45^\circ) \\ &= 11.2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

مسألة (5): احسب عزم المحصلة حول النقطة O.



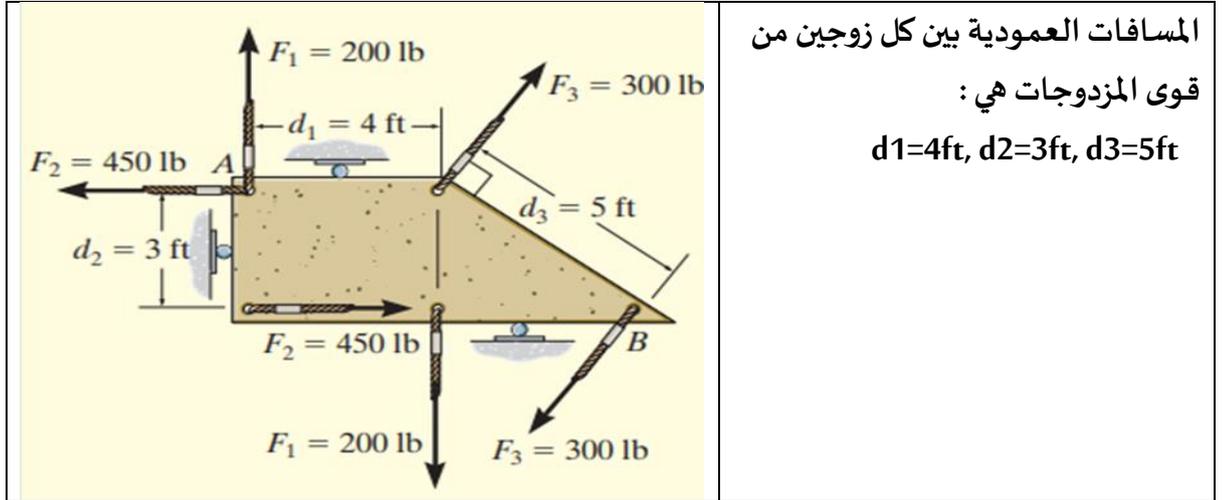
$$\begin{aligned} \zeta + (M_R)_O &= \sum Fd; \\ (M_R)_O &= -(600 \text{ N})(1 \text{ m}) \\ &\quad + (500 \text{ N})[3 \text{ m} + (2.5 \text{ m}) \cos 45^\circ] \\ &\quad - (300 \text{ N})[(2.5 \text{ m}) \sin 45^\circ] \\ &= 1254 \text{ N} \cdot \text{m} = 1.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

مسألة (6): احسب عزم المحصلة حول النقطة O.



$$\begin{aligned} \zeta + (M_R)_O &= \sum Fd; \\ (M_R)_O &= \left[ \left( \frac{3}{5} \right) 500 \text{ N} \right] (0.425 \text{ m}) \\ &\quad - \left[ \left( \frac{4}{5} \right) 500 \text{ N} \right] (0.25 \text{ m}) \\ &\quad - [(600 \text{ N}) \cos 60^\circ] (0.25 \text{ m}) \\ &\quad - [(600 \text{ N}) \sin 60^\circ] (0.425 \text{ m}) \\ &= -268 \text{ N} \cdot \text{m} = 268 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

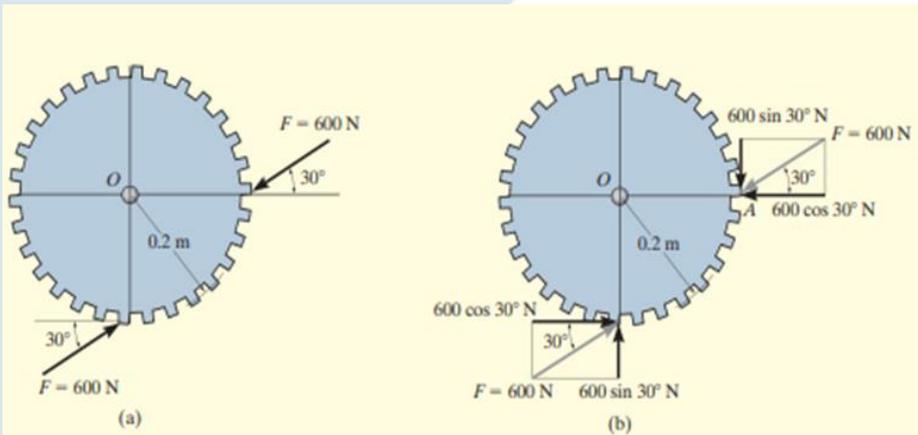
**مسألة (7)** احسب عزم محصلة المزدوجات الثلاث المؤثرة على الصفيحة .



$$M_R = \sum M, M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

$$= -(200)(4) + (450)(3) - (300)(5) = -900 \text{ lb.ft}$$

**مسألة (8)** : احسب الشدة والاتجاه لعزم المزدوجة المؤثرة على المسنن



**الحل :** من أجل سهولة الحل نحلل كل قوة إلى مركبتين متعامدتين ، ونحسب العزم حول أية نقطة اختيارية مثل النقطة O أو A.

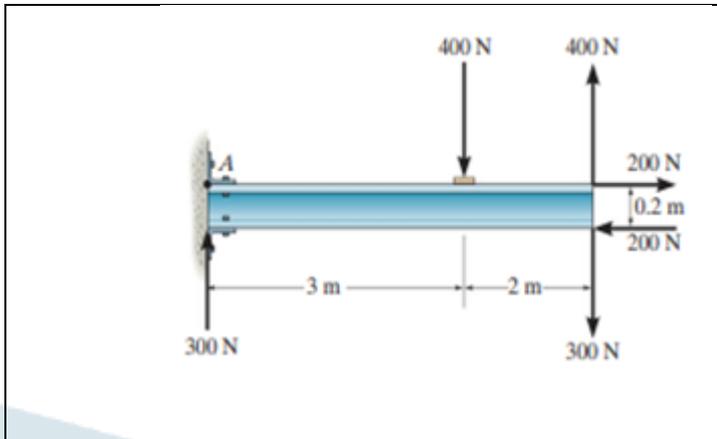
العزم حول النقطة O :

$$M = \sum M_O = (600 \cos 30)(0.2m) - (600 \sin 30)(0.2m) = 43.9 N \cdot m$$

أو: حول النقطة A :

$$M = \sum M_A = -(600 \sin 30)(0.2m) + (600 \cos 30)(0.2m) = 43.9 N \cdot m$$

**مسألة (9):** احسب عزم مزدوجة المحصلة المؤثرة على العتبة .

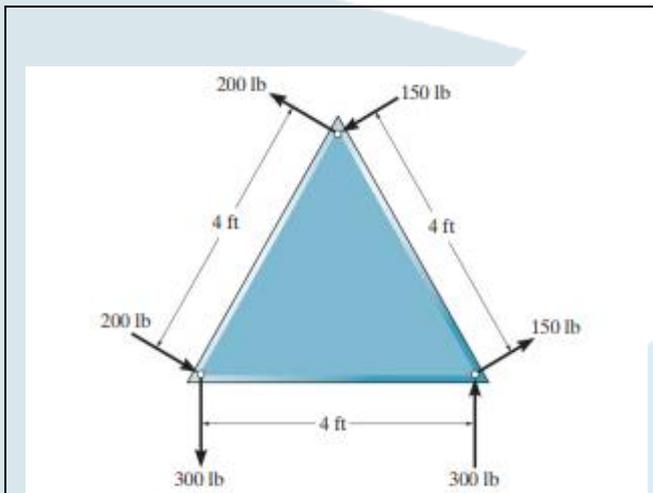


$$\begin{aligned} \zeta + M_{C_R} &= \sum M_A = 400(3) - 400(5) + 300(5) \\ &+ 200(0.2) = 740 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} \zeta + M_{C_R} &= 300(5) - 400(2) + 200(0.2) \\ &= 740 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

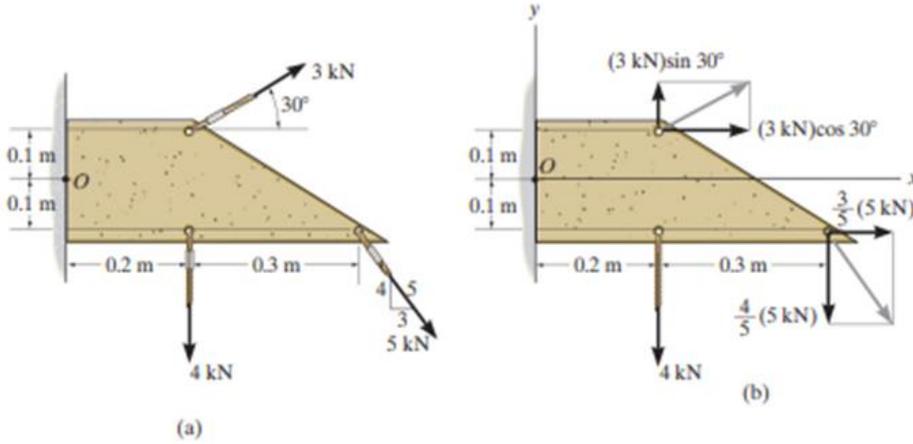
**مسألة (10):** احسب عزم مزدوجة المحصلة المؤثرة على الصفيحة .



$$\begin{aligned} \zeta + M_{C_R} &= 300(4) + 200(4) + 150(4) \\ &= 2600 \text{ lb} \cdot \text{ft} \end{aligned}$$

*Ans.*

**مسألة (11):** المطلوب استبدال نظام القوى والعزوم المؤثرة ، بقوة مكافئة وحيدة وعزم مزدوجة تؤثر عند النقطة O.



**الحل : مجموع القوى :** نحلل القوتين 5 و 3 KN إلى مركبتين متعامدتين

$$\rightarrow (F_R)_x = \sum F_x; \quad (F_R)_x = (3 \text{ kN}) \cos 30^\circ + \left(\frac{3}{5}\right)(5 \text{ kN}) = 5.598 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \sum F_y; \quad (F_R)_y = (3 \text{ kN}) \sin 30^\circ - \left(\frac{4}{5}\right)(5 \text{ kN}) - 4 \text{ kN} = -6.50 \text{ kN} = 6.50 \text{ kN} \downarrow$$

شدة المحصلة :

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{(5.598 \text{ kN})^2 + (6.50 \text{ kN})^2} = 8.58 \text{ kN}$$

منحى المحصلة :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.50 \text{ kN}}{5.598 \text{ kN}}\right) = 49.3^\circ$$

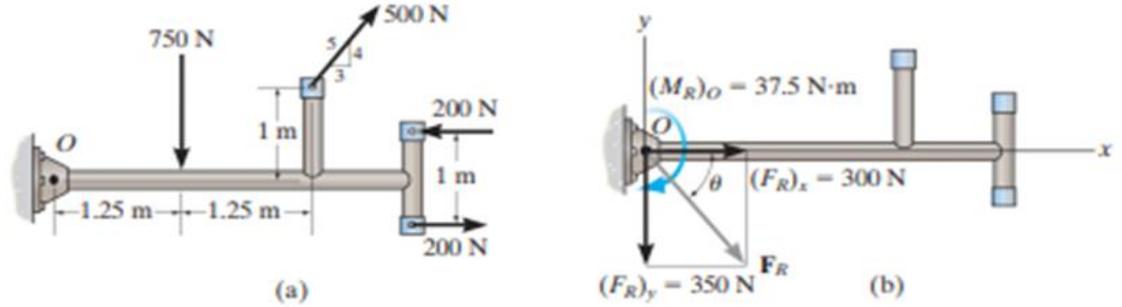
مجموع العزوم :

$$\zeta + (M_R)_O = \sum M_O;$$

$$\begin{aligned} (M_R)_O &= (3 \text{ kN}) \sin 30^\circ (0.2 \text{ m}) - (3 \text{ kN}) \cos 30^\circ (0.1 \text{ m}) + \left(\frac{3}{5}\right)(5 \text{ kN}) (0.1 \text{ m}) \\ &\quad - \left(\frac{4}{5}\right)(5 \text{ kN}) (0.5 \text{ m}) - (4 \text{ kN})(0.2 \text{ m}) \\ &= -2.46 \text{ kN} \cdot \text{m} = 2.46 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

**Ans.**

**مسألة (12):** المطلوب استبدال نظام القوى والعزوم المؤثرة ، بقوة مكافئة وحيدة وعزم مزدوجة حول النقطة O.



**مجموع القوى:** المزدوجة 200 N مؤلفة من قوتين متساويتين بالشدة ومتعاكستين بالاتجاه ، وبالتالي لا توجد حاجة لكتابة القوتين في حساب مجموع القوى ، وتدخل المزدوجة في حساب العزوم فقط .

$$\rightarrow (F_R)_x = \Sigma F_x; (F_R)_x = \left(\frac{3}{5}\right)(500 \text{ N}) = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y; (F_R)_y = (500 \text{ N})\left(\frac{4}{5}\right) - 750 \text{ N} = -350 \text{ N} = 350 \text{ N} \downarrow$$

شدة المحصلة:

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

$$= \sqrt{(300 \text{ N})^2 + (350 \text{ N})^2} = 461 \text{ N}$$

منحى المحصلة:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{350 \text{ N}}{300 \text{ N}}\right) = 49.4^\circ$$

**مجموع العزوم:** عزم المزدوجة عبارة عن شعاع حريمكنه أن يؤثر في أية نقطة من الجسم .

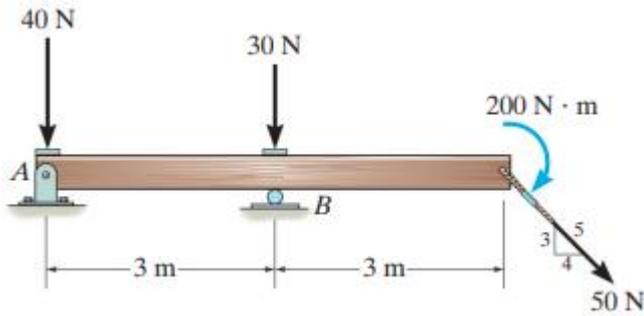
$$\zeta + (M_R)_O = \Sigma M_O + \Sigma M$$

$$(M_R)_O = (500 \text{ N})\left(\frac{4}{5}\right)(2.5 \text{ m}) - (500 \text{ N})\left(\frac{3}{5}\right)(1 \text{ m})$$

$$- (750 \text{ N})(1.25 \text{ m}) + 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

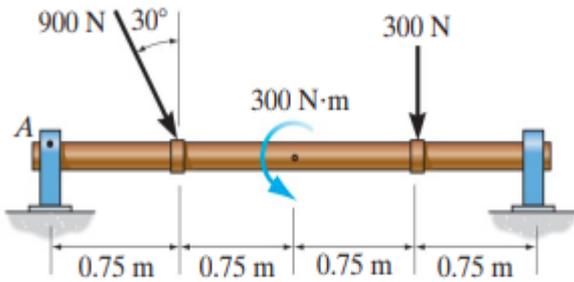
$$= -37.5 \text{ N} \cdot \text{m} = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

مسألة (13): المطلوب استبدال نظام القوى والعزوم بقوة محصلة وحيدة وعزم مزدوجة تؤثر عند النقطة A.



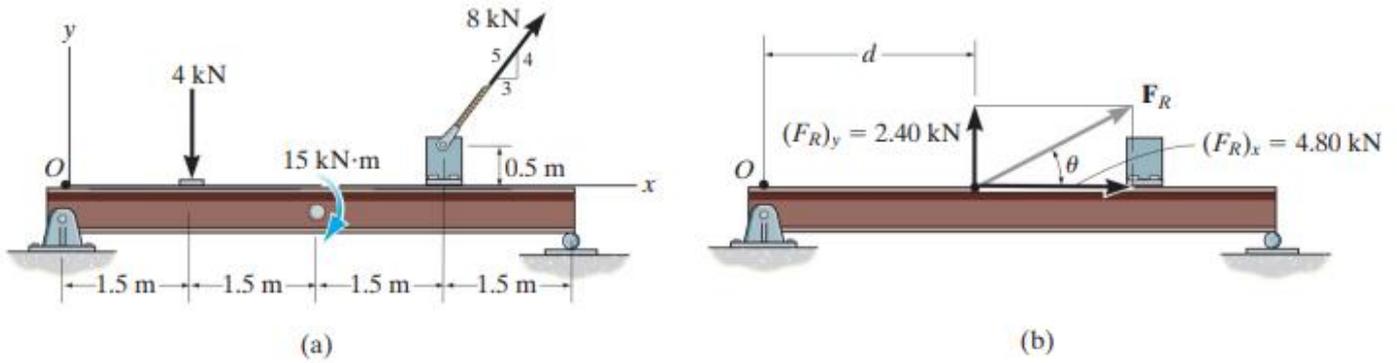
$$\begin{aligned} \rightarrow F_{Rx} &= \Sigma F_x; & F_{Rx} &= \frac{4}{5}(50) = 40 \text{ N} \\ + \downarrow F_{Ry} &= \Sigma F_y; & F_{Ry} &= 40 + 30 + \frac{3}{5}(50) \\ & & &= 100 \text{ N} \\ F_R &= \sqrt{(40)^2 + (100)^2} = 108 \text{ N} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{100}{40}\right) = 68.2^\circ \swarrow \\ \curvearrowright + M_{Ar} &= \Sigma M_A; \\ M_{Ar} &= 30(3) + \frac{3}{5}(50)(6) + 200 \\ &= 470 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

مسألة (14): المطلوب استبدال نظام القوى والعزوم بقوة محصلة وحيدة وعزم مزدوجة تؤثر عند النقطة A.



$$\begin{aligned} \rightarrow (F_R)_x &= \Sigma F_x; \\ (F_R)_x &= 900 \sin 30^\circ = 450 \text{ N} \rightarrow \\ + \uparrow (F_R)_y &= \Sigma F_y; \\ (F_R)_y &= -900 \cos 30^\circ - 300 \\ &= -1079.42 \text{ N} = 1079.42 \text{ N} \downarrow \\ F_R &= \sqrt{450^2 + 1079.42^2} \\ &= 1169.47 \text{ N} = 1.17 \text{ kN} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1079.42}{450}\right) = 67.4^\circ \swarrow \\ \curvearrowright + (M_R)_A &= \Sigma M_A; \\ (M_R)_A &= 300 - 900 \cos 30^\circ (0.75) - 300(2.25) \\ &= -959.57 \text{ N}\cdot\text{m} \\ &= 960 \text{ N}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{aligned}$$

**مسألة (15):** المطلوب استبدال نظام القوى وعزوم المزدوجات المؤثرة على العتبة بقوة محصلة وحيدة وعزم مزدوجة، وحدد نقطة تقاطع خط تأثير المحصلة مع العتبة مقاسة من النقطة O.



الحل:

**مجموع القوى:** نجمع مركبات كافة القوى على المحورين X و Y :

$$\begin{aligned} \rightarrow (F_R)_x &= \Sigma F_x; & (F_R)_x &= 8 \text{ kN} \left(\frac{3}{5}\right) = 4.80 \text{ kN} \rightarrow \\ + \uparrow (F_R)_y &= \Sigma F_y; & (F_R)_y &= -4 \text{ kN} + 8 \text{ kN} \left(\frac{4}{5}\right) = 2.40 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

شدة المحصلة:

$$F_R = \sqrt{(4.80 \text{ kN})^2 + (2.40 \text{ kN})^2} = 5.37 \text{ kN}$$

منحى المحصلة:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2.40 \text{ kN}}{4.80 \text{ kN}} \right) = 26.6^\circ$$

**مجموع العزوم:** يجب حساب عزم المحصلة FR حول النقطة O، وكذلك عزم كافة القوى وعزوم المزدوجات حول النقطة O. مع ملاحظة أن مركبة المحصلة وفق المحور x  $F_{Rx}$  لا تولد عزماً حيث يمر خط تأثيرها من النقطة O. وتبقى مركبة المحصلة وفق المحور y  $F_{Ry}$  هي التي تولد عزماً.

$$\begin{aligned} \zeta + (M_R)_O &= \Sigma M_O; & 2.40 \text{ kN}(d) &= -(4 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ & & & - [8 \text{ kN} \left(\frac{3}{5}\right)](0.5 \text{ m}) + [8 \text{ kN} \left(\frac{4}{5}\right)](4.5 \text{ m}) \\ & & d &= 2.25 \text{ m} \end{aligned}$$

Ans

**مسألة (16):** المطلوب استبدال نظام الحمولات المؤثرة على العتبة بقوة محصلة وحيدة وعزم مزدوجة ، وحدد نقطة تقاطع خط تأثير المحصلة مع العتبة مقاسة من النقطة A .

مجموع القوى

$$\rightarrow (F_R)_x = \Sigma F_x;$$

$$(F_R)_x = 100\left(\frac{3}{5}\right) + 50 \sin 30^\circ = 85 \text{ lb} \rightarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$$

$$(F_R)_y = 200 + 50 \cos 30^\circ - 100\left(\frac{4}{5}\right) \\ = 163.30 \text{ lb} \uparrow$$

$$F_R = \sqrt{85^2 + 163.30^2} = 184 \text{ lb}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{163.30}{85}\right) = 62.5^\circ \swarrow$$

$$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$$

$$163.30(d) = 200(3) - 100\left(\frac{4}{5}\right)(6) + 50 \cos 30^\circ(9)$$

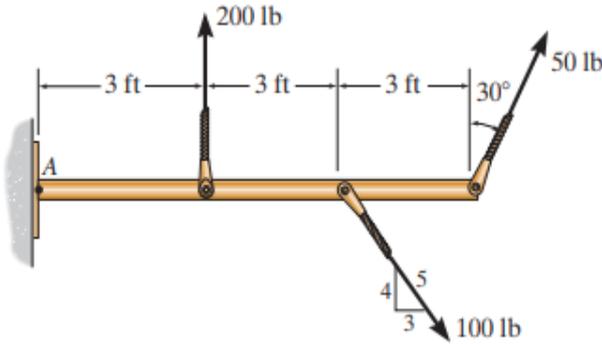
$$d = 3.12 \text{ ft}$$

المحصلة

المنحى

مجموع العزوم حول النقطة A

Ans.



**مسألة (17):** المطلوب استبدال نظام الحمولات المؤثرة على العمود بقوة محصلة وحيدة وعزم مزدوجة ، وحدد نقطة تقاطع خط تأثير المحصلة مع العمود AB مقاسة من النقطة A .

مجموع القوى:

$$\rightarrow (F_R)_x = \Sigma F_x;$$

$$(F_R)_x = \left(\frac{3}{5}\right) 5 \text{ kN} - 8 \text{ kN} \\ = -5 \text{ kN} = 5 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow (F_R)_y = \Sigma F_y;$$

$$(F_R)_y = -6 \text{ kN} - \left(\frac{4}{5}\right) 5 \text{ kN} \\ = -10 \text{ kN} = 10 \text{ kN} \downarrow$$

$$F_R = \sqrt{5^2 + 10^2} = 11.2 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10 \text{ kN}}{5 \text{ kN}}\right) = 63.4^\circ \searrow$$

$$\zeta + (M_R)_A = \Sigma M_A;$$

$$5 \text{ kN}(d) = 8 \text{ kN}(3 \text{ m}) - 6 \text{ kN}(0.5 \text{ m}) \\ - \left[\left(\frac{4}{5}\right) 5 \text{ kN}\right](2 \text{ m}) \\ - \left[\left(\frac{3}{5}\right) 5 \text{ kN}\right](4 \text{ m})$$

$$d = 0.2 \text{ m}$$

المحصلة:

مجموع العزوم حول النقطة A

