# المحاضرة التاسعة – ميكانيك النقطة المادية

د.نزارعبد الرحمن

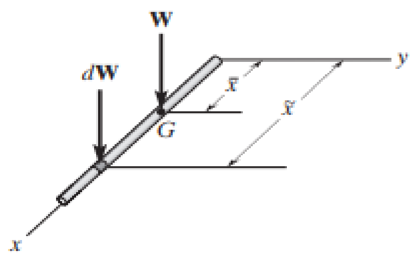
## مركز الجاذبية والمركز الهندسي -عزم العطالة

مركز الجاذبية هو النقطة التي تلتقي عندها محصلة الوزن للجسيمات التي يتألف منها الجسم.

يتألف الجسم من مجموعة لانهائية من الجسيمات ذات حجم تفاضلي ووزن dw . تشكّل هذه الأوزان نظام من القوى المتوازية ،وتكون محصلة نظام القوى عبارة عن وزن الجسم الذي يمر بنقطة وحيدة "تدعى مركز الجاذبية "أو"مركز الثقلG "

من أجل تحديد موقع مركز الثقل ، نفرض قضيب بوزن dw مركزة في موقع غير محدد $\tilde{x}$ .

الوزن الكلي للقضيب يساوي مجموع الأوزان الجزئية لكافة الجسيمات التي يتألف منها .




(a)

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \qquad W = \int dW$$

بفرض لدينا نظام مؤلف من عدد من الجزيئات ، محصلة الوزن يجب أن تساوي الوزن الكلي لكافة الجسيمات.

من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة للمحورy ، نكتب معادلة العزوم للوزن W حول المحور y، الذي يكون مساويا لعزم كافة الجزيئات حول نفس المحور:

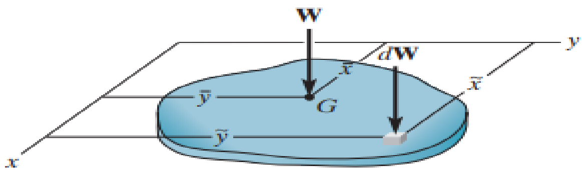
$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW}$$

بنفس الطريقة إذا كان الجسم عبارة عن صفيحة ( الشكل b)، نستطيع كتابة معادلات توازن العزوم حول المحورين x –y من أجل تحديد موقع المركز الثقل G(x,y)

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad \bar{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

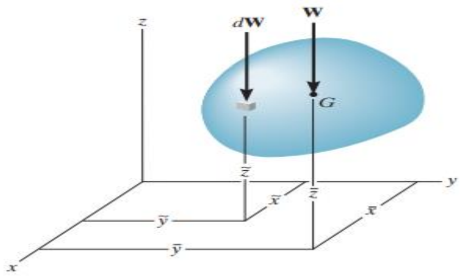
$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW}$$



(b)

أخيرا يمكن تعميم هذه النتيجة في الفراغ ثلاثي الأبعاد ( الشكل c) وكتابة معادلات العزوم حول محاور الاحداثيات الثلاث ، من أجل تحديد موقع مركز الثقل بالنسبة لأية محاور احداثيات

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dW}{\int dW} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\,dW}{\int dW}$$



(c)

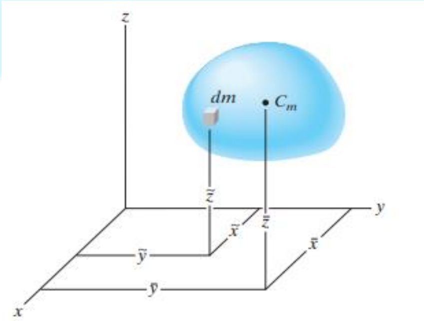
## مركز الكتلة :

عند دراسة المسائل المتعلقة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى ( علم الديناميك) ،من الضروري تحديد نقطة تسمى " مركز الكتلة "بوضع علاقة الوزن والكتلة

$$\mathbf{dW = m.g}$$

في المعادلة السبقة ينتج لدينا العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm} \qquad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\,dm}{\int dm}$$

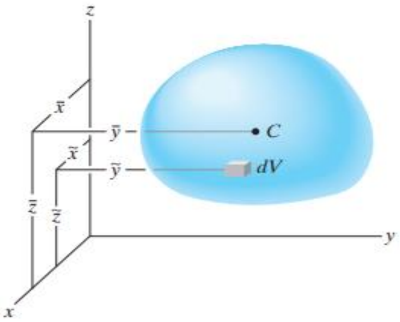


## المركز الهندسي :

المركز الهندسي هو النقطة التي تعرّف مركز الجسم ويعتمد على هندسية الجسم ونميز ثلاث حالات :

المركز الهندسي للحجم : عندما يتألف الجسم من مادة متجانسة ، تكون الكثافة ثابتة $dm = \rho dv$

نحصل على العلاقات التي تحدد المركز الهندسي للجسم :

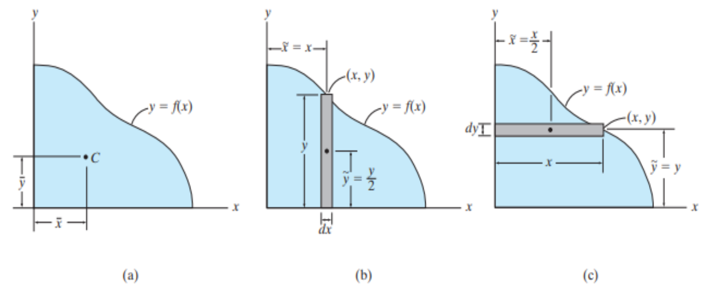



$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

## المركز الهندسي للمساحة :

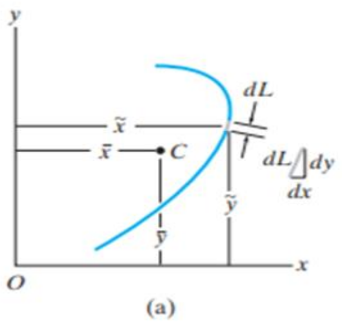
يتم تقسيم المساحة الى مساحات جزئية وحساب العزوم حول كافة محور الاحداثيات

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA}$$




## الخط :

نعتبر عنصر التفاضل ونحسب العزوم حول محاور الاحداثيات.




$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL}$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

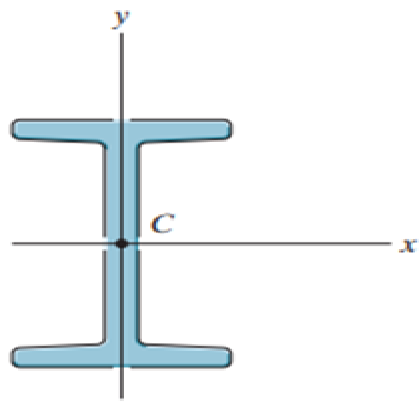
$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

## نقاط هامة :

- يمثل المركز الهندسي للجسم النقطة التي يتطابق فيها مركز الكتلة أو مركز الثقل عندما يكون الجسم متجانس .
- المعادلة المستخدمة لتحديد مركز الثقل أو المركز الهندسي عبارة عن موازنة معادلات العزوم لكافة الجسيمات التي يتألف منها الجسم ،وعزم المحصلة لنظام القوى .
- في بعض الحالات يقع المركز الهندسي للجسم خارج الجسم ( من أجل حلقة مثلا ).
- إذا كان الجسم يمتلك محورا تناظريا .فإن المركز الهندسي يقع على هذا المحور.




## الأجسام المركبة :

من الممكن أن يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال ( مستطيل ، مثلث ، نصف دائرة ...)، عندها نستطيع تقسيم الجسم إلى مجموعة من الأجسام وحساب المركز من أجل كل قسم، بدلا من حساب علاقات التكامل نستطيع استخدام العلاقات التالية :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

حيث :

$\bar{z}$، $\bar{y}$، $\bar{x}$ احداثيات مركز الثقل للجسم المركب .

$\tilde{z}$، $\tilde{y}$، $\tilde{x}$ - احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

$\sum W$ - مجموع الأوزان الجزئية لكافة الأجزاء التي يتألف منها الجسم .

## نظرية PAPPUS-GULDINUS:

تستخدم لحساب مساحة وحجم أي جسم دوراني

وضعت النظريتين لأول مرة من قبل الرياضي "بابوس" في القرن الرابع ميلادي في الاسكندرية . وطوّرت من قبل الرياضي السويسري "غولدينوس " في القرن العاشر. واستخدمتا من أجل حساب مساحة السطح والحجم للأجسام الدورانية .

### مساحة السطح :

إذا قمنا بتدوير منحني مستوي حول محور لايتقاطع مع المنحني ، فإن المنحني سيشكّل سطح دوراني .

مثلا تتشكّل مساحة السطح المبيّن في الشكل عن طريق تدوير المنحني بطول L حول المحور الأفقي .

من أجل حساب مساحة السطح ، نفرض أولا عنصر تفاضلي بطول dL

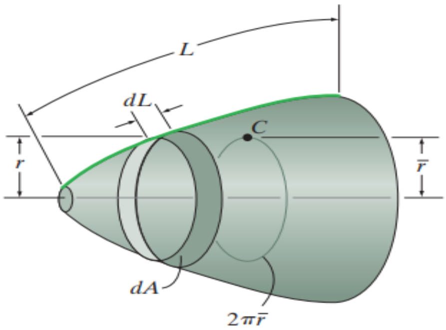
إذا قمنا بتدوير العنصر بزاوية $2\pi$ راديان حول المحور الأفقي .

مساحة الحلقة المتشكّلة : $dA = 2\pi \int \bar{r}\,.\,dL$

$$A = 2\pi\,.\bar{r}\,.\,L$$

إذا دار المنحني بزاوية $\theta$ :

$$A = \theta.\bar{r}\,.\,L$$




**مساحة السطح** : مساحة السطح الدوراني تساوي : جداء منحني التشكيل مع المسافة المقطوعة من قبل المركز الهندسي للمنحني خلال تشكيل مساحة السطح.

$$\boxed{A = \theta r . L}$$

$A$ - مساحة السطح الدوراني .

$\theta$- زاوية الدوران مقاسة بالراديان .

$r$- المسافة العمودية من محور الدوران إلى مركز المنحني المشكّل.

$L$- طول منحني التشكيل .

**الحجم** : حجم الجسم الدوراني يساوي جداء مساحة التشكيل ، مع المسافة المقطوعة من قبل المركز الهندسي للمساحة خلال تشكيل الحجم.

$$\boxed{V = \theta r . A}$$

$V$ – حجم الدوران .

$\theta$- زاوية الدوران مقاسة بالراديان .

$r$- المسافة العمودية من محور الدوران إلى مركز مساحة التشكيل.

$A$- مساحة التشكيل .

## الأشكال المركّبة :

مساحة السطح الكلي أو الحجم المتشكل يساوي مساحات السطوح أو الأحجام المتشكلة من قبل كل جزء .

$$A = \theta \sum (r.L)$$

$$V = \theta \sum (r.A)$$

## عزم العطالة ( القصور الذاتي)

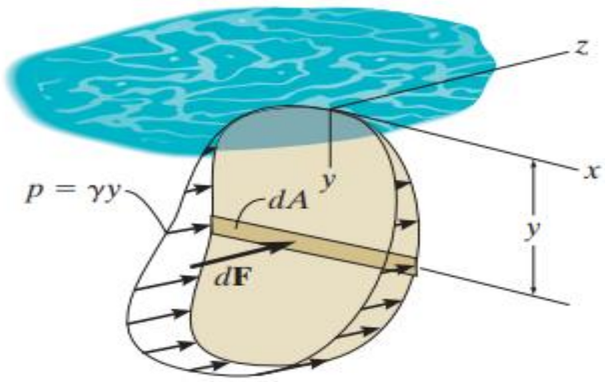
من أجل توضيح مفهوم عزم العطالة ، نفرض صفيحة مغمورة بالمياه معرضة لضغط P ، ويتغير الضغط خطيا حسب العمق حيث :

$$P = \gamma . Y$$

$\gamma$ - الوزن النوعي للماء

مقدار القوة المؤثرة على الصفيحة:

$$dF = P.dA = (\gamma Y).dA$$




عزم هذه القوة حول المحور X:

$$dM = y.dF = \gamma . y^2 . dA$$

تكامل $dM$ من أجل كامل المساحة :

$$M = \gamma \int y^2 \, dA$$

يسمّى التكامل$\int y^2 \, dA$ بعزم العطالة للمساحة ، أو" عزم القصور الذاتي ".

إن مصطلح " عزم العطالة للمساحة " لامعنى فيزيائي له ، ولكنه مصطلح مستخدم بشكل أساسي في ميكانيك الموائع ، ومقاومة المواد ، والانشاءات الهندسية والتصميم الميكانيكي .

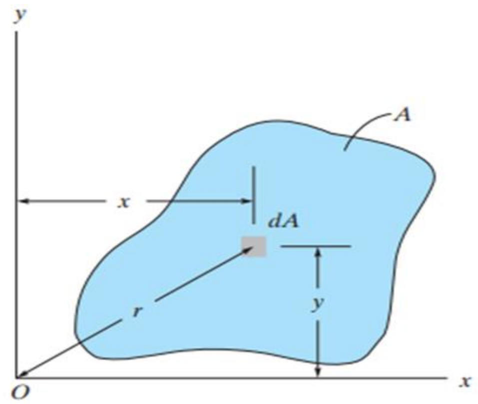
## عزم العطالة :

يتم تحديد مركز الثقل للمساحة عن طريق العزم الأول للمساحة حول محور،

التكامل الثاني للعزم يمثل عزم القصور الذاتي للمساحة .

عزم العطالة من أجل عنصر المساحة حول المحاور y, x

$$I_x = y^2 . dA \,, \qquad dI_y = x^2 . dA$$




من أجل كامل المساحة يتم تحديد عزم العطالة عن طريق علاقات التكامل :

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \, dA \\ I_y &= \int_A x^2 \, dA \end{aligned}}$$

أيضا يمكننا كتابة العزم الثاني للمساحة حول القطب أو المحور، يسمى عزم العطالة القطبي ويستخدم لحساب عزم الفتل في الأعمدة

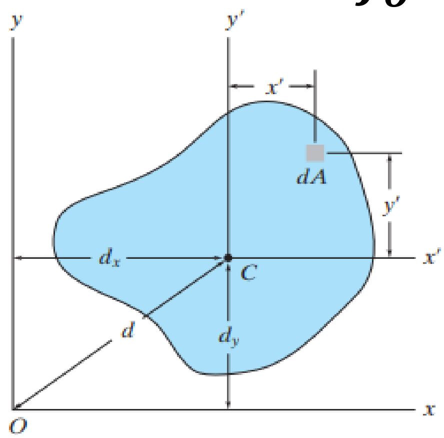
$$\boxed{J_O = \int_A r^2 \, dA = I_x + I_y}$$

r- المسافة العمودية من القطب ( المحور) إلى عنصر المساحة

## نظرية المحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتي للمساحة حول محور يساوي عزم القصور الذاتي حول محور يمر بمركز الثقل + المساحة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .أي أن :

$$I_x = I_{x'} + Ad_y^2$$
$$I_y = I_{y'} + Ad_x^2$$
$$J_O = I_C + Ad^2$$




## نصف قطر التدويم :

يستخدم عادة في تصميم الأعمدة في الانشاءات الميكانيكية ،بفرض أن المساحة وعزم القصور معروفين :

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad , \quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

## حساب عزم العطالة للمساحة عن طريق التكامل :

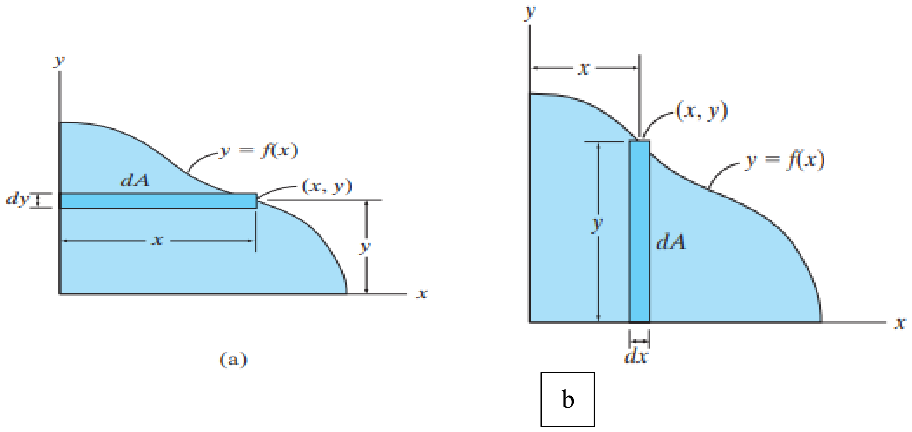
في معظم الحالات يمكن حساب عزم القصورعن طريق تكامل أحادي .

عندما يعطى المنحني المحدد للمساحة عن طريق تابع رياضي $y=f(x)$،

عندها يتم اختيار عنصر تفاضلي للمساحة بطول محدد وعرض تفاضلي .

عادة يمكن اختيار طول العنصر بشكل موازللمحور المراد حساب عزم العطالة عنده ، من أجل الشكل (a) حيث يراد حساب العزم حول المحور x يمتلك العنصر سماكة dy، عندها يكون لكافة أجزاء العنصر نفس الذراع y بالنسبة للمحور x.

من أجل الشكل ( b) يقع العنصر التفاضلي على نفس المسافة x بالنسبة للمحورy.




## عزم عطالة الكتلة :

خاصية للجسم تقيس مقاومة الجسم للتسارع الزاوي ، تستخدم في علم الديناميك من أجل دراسة الحركة الدورانية .

نعرّف عزم القصور الذاتي للجسم حول محور Z طريق العلاقة

$$I = \int_m r^2 \, \mathrm{dm}$$

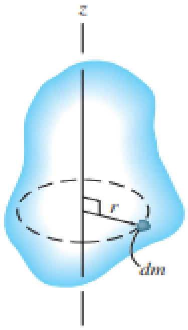
الواحدات: $kg.m^2$

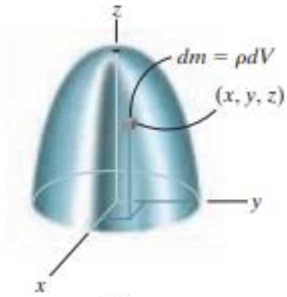
إذا كان الجسم الصلب يمتلك قيما مختلفة للكثافة عندها يمكن التعبير عن عنصر الكتلة وفق قيم الكثافة للحجم $dm = \rho dv$

$$I = \int_v r^2 \rho . dv$$

من أجل قيم ثابتة للكثافة :

$$I = \rho \int_v r^2 dv$$




(a)

## نظرية المحاورالمتوازية :

عندما يكون عزم القصورالذاتي لجسم حول محوريمر بمركز الكتلة معروفا ، عندها يمكننا حساب عزم القصورالذاتي للجسم حول أي محورآخر موازيا للمحورالسابق .

عزم القصورالذاتي للكتلة حول محوريساوي عزم القصورحول محوريمر بمركز الثقل مضافا إليه الكتلة مضروبة بمربع المسافة بين المحورين

$$\boxed{I = I_G + md^2}$$

$I$ - عزم العطالة للكتلة حول محور ما

عزم العطالة للكتلة حول محوريمر بمركز الثقل. $I_G$

-كتلة الجسم m

- المسافة بين المحورين .d

## الأجسام المركبة :

من أجل حساب عزم القصورالذاتي لجسم مؤلف من عدد من الأجسام البسيطة حول محور، نقوم بحساب الجمع الجبري لعزوم القصورلكل جزء حول نفس المحور.