الجلسة التاسعة – ميكانيك النقطة المادية

د.نزار عبد الرحمن

الأجسام المركبة :

عندما يتألف الجسم من مجموعة من الأشكال البسيطة المعروفة (مربع ، مثلث ، مستطيل ، دائرة ....) ، عندها يمكن تقسيم الجسم إلى أجزاء مركبة وحساب وزن ومركز الثقل لكل جزء .
عندها يمكننا حل المسائل بدون اللجوء إلى علاقات التكامل عن طريق العلاقات التالية :

$$\bar{x} \quad \tilde{x} \quad \bar{y} \quad \tilde{y}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} W}{\Sigma W} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} W}{\Sigma W} \quad \bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z} W}{\Sigma W}$$

حيث :

$\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{z}$. احداثيات مركز الثقل G للجسم المركب .

- $\tilde{x}$ ، $\tilde{y}$ ، $\tilde{z}$ احداثيات مركز الثقل لكل جزء من الجسم .

- $\sum W$ مجموع الأوزان الجزئية لكل جزء من الجسم ، أو ببساطة الوزن الكلي للجسم .

عندما يمتلك الجسم كثافة ثابتة ، أو وزن نوعي ، عندها يتطابق مركز الثقل مع المركز الهندسي للجسم .

يمكن حساب المركز الهندسي للخط ، أو للمساحة ، أو للحجم عن طريق تطبيق علاقات مشابهه للعلاقة السابقة .

مسألة (1) : احسب المركز الهندسي للسلك المبيّن في الشكل .

موقع المركز الهندسي لكل جزء معطى في الجداول ، أو يمكن حسابه عن طريق التكامل (الجزء 1).

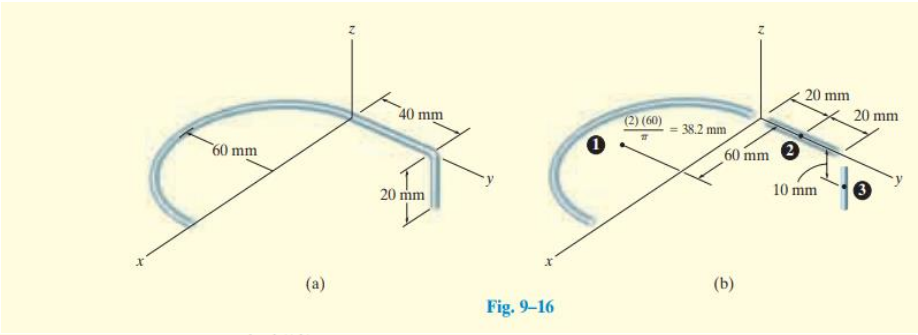


Fig. 9–16

Segment	L (mm)	$\tilde{x}$ (mm)	$\tilde{y}$ (mm)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{x}L$ (mm^2)	$\tilde{y}L$ (mm^2)	$\tilde{z}L$ (mm^2)
1	$\pi(60) = 188.5$	60	−38.2	0	11 310	−7200	0
2	40	0	20	0	0	800	0
3	20	0	40	−10	0	800	−200
	$\Sigma L = 248.5$				$\Sigma\tilde{x}L = 11\,310$	$\Sigma\tilde{y}L = -5600$	$\Sigma\tilde{z}L = -200$

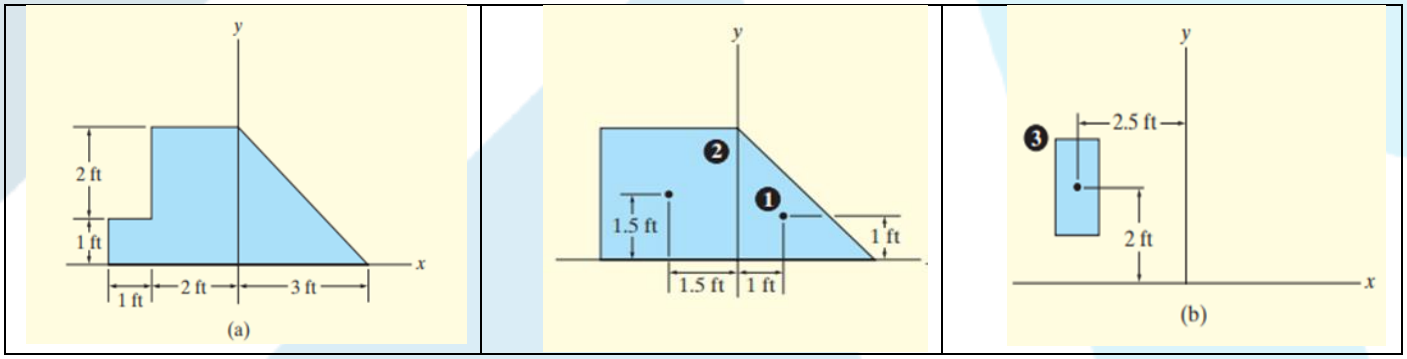
Thus,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\tilde{x}L}{\Sigma L} = \frac{11\,310}{248.5} = 45.5 \text{ mm} \quad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}L}{\Sigma L} = \frac{-5600}{248.5} = -22.5 \text{ mm} \quad \textit{Ans.}$$

$$\bar{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}L}{\Sigma L} = \frac{-200}{248.5} = -0.805 \text{ mm} \quad \textit{Ans.}$$

مسألة (2): احسب المركز الهندسي للمساحة المبيّنة في الشكل .



الحل : تم تقسيم الشكل إلى ثلاثة أقسام ، مع ملاحظة أن مساحة المستطيل الصغير(3) تعتبر سالبة. أي يجب طرحها من المساحة الكلية للمستطيل (2).

أذرع العزم : في الشكل تم تحديد المركز لكل جزء من المساحة مع ملاحظة أن الاحداثيتين وفق المحور x للمساحتين (2) و(3) سالبتين .

الجدول :

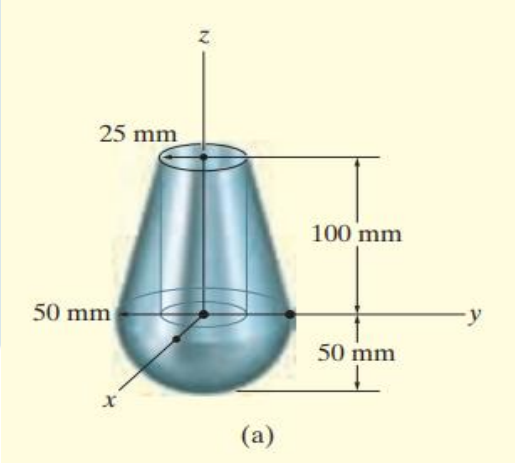
Segment	A (ft^2)	$\tilde{x}$ (ft)	$\tilde{y}$ (ft)	$\tilde{x}A$ (ft^3)	$\tilde{y}A$ (ft^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

Thus,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

مسألة (3): أوجد مركز الكتلة للشكل المبين. يمتلك المخروط المقطوع كثافة $\rho_{c=8Mg/m^3}$ ، ولنصف الكرة $\rho_{h=4Mg/m^3}$. يوجد ثقب اسطواني بنصف قطر 25-mm في منتصف المخروط .



الأجزاء المركبة : يمكن تقسيم الشكل إلى أربعة أجزاء ، نعتبر أن الحجمين (3) و(4) سالبين في الحساب .

ذراع العزم : من الجدول نكتب احداثيات المركزوفق المحور Z.

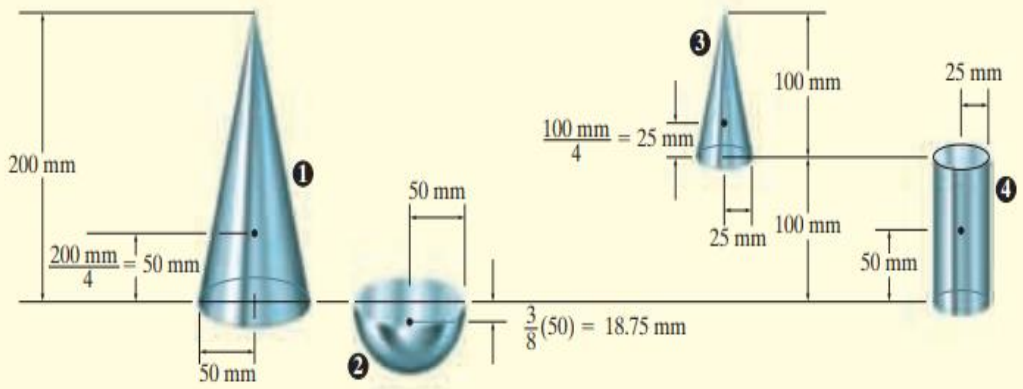
المجموع : نتيجة للتناظر $x = y = 0$

$$w = m.g$$

نستطيع حساب كتلة كل جزء عن طريق المعادلة :

$$m = \rho.v$$

واعتبار $1Mg/m^3 = 10^{-6}\ kg/mm^3$

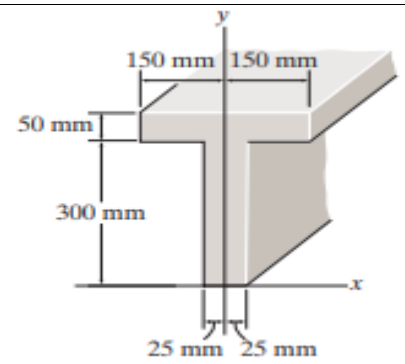


(b)

Segment	m (kg)	$\tilde{z}$ (mm)	$\tilde{z}m$ (kg · mm)
1	$8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(50)^2(200) = 4.189$	50	209.440
2	$4(10^{-6})\left(\frac{2}{3}\right)\pi(50)^3 = 1.047$	−18.75	−19.635
3	$-8(10^{-6})\left(\frac{1}{3}\right)\pi(25)^2(100) = -0.524$	100 + 25 = 125	−65.450
4	$-8(10^{-6})\pi(25)^2(100) = -1.571$	50	−78.540
	$\Sigma m = 3.142$		$\Sigma\tilde{z}m = 45.815$

Thus, $\tilde{z} = \frac{\Sigma\tilde{z}m}{\Sigma m} = \frac{45.815}{3.142} = 14.6$ mm *Ans.*

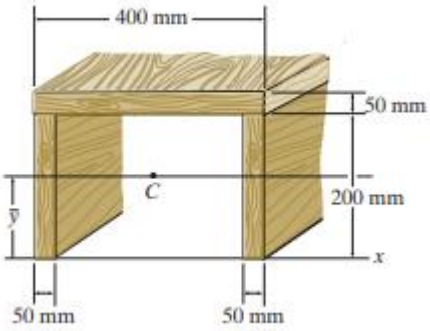
مسألة (4): احسب احداثيات مركز الثقل $\bar{y}$ لمقطع العتبة المبينة في الشكل .



$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{150[300(50)] + 325[50(300)]}{300(50) + 50(300)}$$

$$= 237.5 \text{ mm}$$

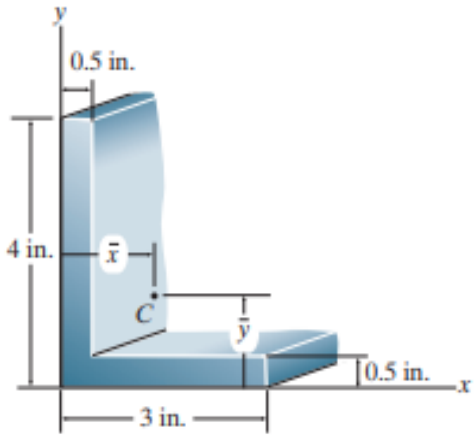
مسألة (5): احسب احداثيات مركز الثقل $\bar{y}$ بالنسبة لمساحة المقطع العرضي



$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{100[2(200)(50)] + 225[50(400)]}{2(200)(50) + 50(400)}$$

$$= 162.5 \text{ mm}$$

مسألة(6) : احسب احداثيات مركز الثقل بالنسبة للمحورين x-y



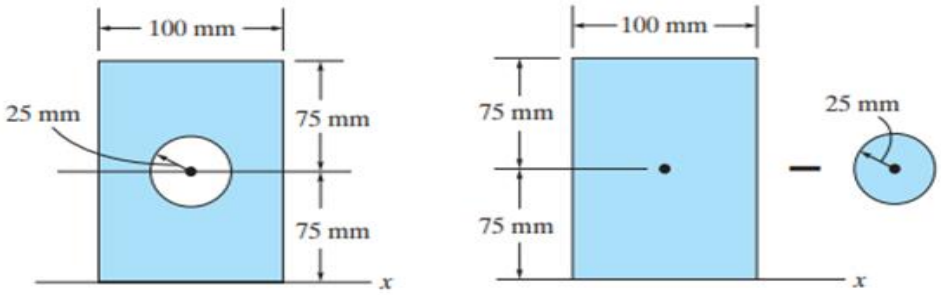
$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} = \frac{0.25[4(0.5)] + 1.75[0.5(2.5)]}{4(0.5) + 0.5(2.5)}$$

$$= 0.827 \text{ in.}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[4(0.5)] + 0.25[(0.5)(2.5)]}{4(0.5) + (0.5)(2.5)}$$

$$= 1.33 \text{ in.}$$

مسألة (7) : احسب عزم العطالة للمساحة المبيّنة في الشكل حول المحور X .



المساحة المركبة : الشكل عبارة عن مستطيل مطروح منه الدائرة .

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة حول المحور X يساوي عزم العطالة حول المحور المار بالمركز ، مضافا إليه مساحة الشكل مضروبة بمربع المسافة بين المحورين .

عزم العطالة للدائرة :

$$I_x = \frac{1}{4}.\pi.r^4$$

عزم العطالة للمستطيل :

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3$$

الدائرة :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

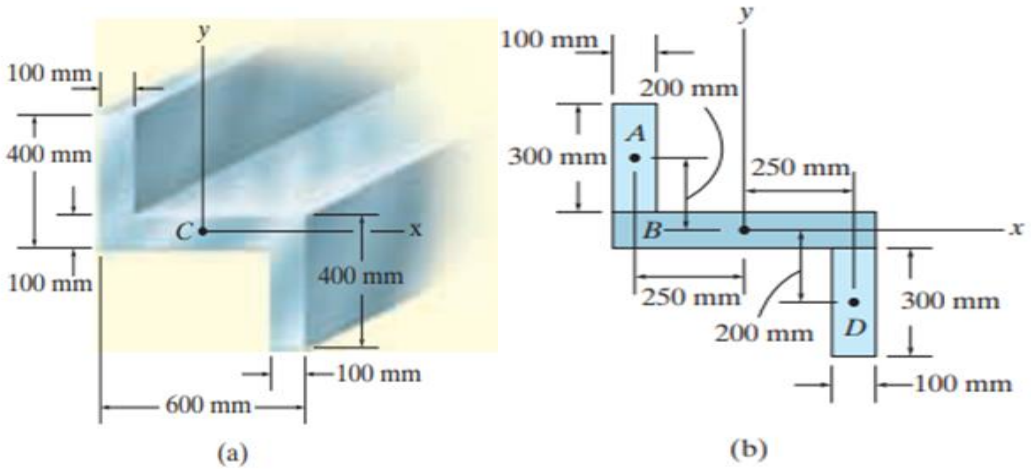
المستطيل :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

المجموع :

$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$
$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$

مسألة (8): احسب عزم العطالة للمقطع العرضي للمساحة حول المحورين y, x المارين بالمركز.



المساحة المركّبة : يمكن تقسيم المساحة إلى ثلاثة مستطيلات A,B,C

نظرية المحاور المتوازية : عزم العطالة للمستطيل حول محور يمر بمركز الثقل :

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3$$

المستطيلان A و D:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

المستطيل B :

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$

المجموع :

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$